Individuální meze matematického myšlení

Jana Musilová

Ústav teoretické fyziky a astrofyziky

Přírodovědecká fakulta MU

Abstrakt

- Ze zkušeností s výukou matematiky na různých úrovních vzdělávání a jejím užíváním v praktických situacích vyplývá, že některé pojmy se mohou jevit jako nepřekonatelná mez v matematickém myšlení.

- Taková omezení (některé třeba i **základní matematické operace, trojčlenka, logaritmus, úrokování, limita, pravděpodobnost**, …) jsou samozřejmě individuální, stejně jako jejich příčiny.

- Mohou být objektivní (určené **věkem, vrozenou dispozicí, kvalitou vzdělávání, skutečnou obtížností pojmů**, apod.), ale i subjektivní **(nezájem či nízká motivace, pochybnost o potřebnosti pojmů, pochybnost o vlastní schopnosti problematiku pochopit).**

- Příspěvek se zabývá specifikací a příklady některých z těchto mezí na různých úrovních vzdělávání (předškolní, základní, střední, terciární) a možnostmi odstranění subjektivních mezí vhodnými a dané úrovni přiměřenými způsoby výuky včetně odpovídajících učebních textů či pomůcek.

Osnova prezentace

- Je matematika „nepřítel"? Proč?

  skutečná obtížnost, způsob výuky, nebo nevhodná „osvěta" ?

  (ne)zájem, (ne)porozumění, „rutina" ?

- Pojmy představující meze matematického myšlení

  úroveň 1: „inversní" operace, trojčlenka (úměra), zaokrouhlování

  úroveň 2: logaritmus (počítání s mocninami, „převod násobení na sčítání"), úrokování (posloupnosti), závislosti (funkce, grafy)

  úroveň 3: limita, pravděpodobnost, linearita (úměra) obecně

- Jak se zbavit omezení, neobliby, strachu, …

  vzbudit zájem (formy výuky, učebnice, pomůcky)

  matematika z chutí versus „Matematika s chutí"

Je matematika nepřítel? Proč? - I

- Averze k matematice (či počtům) není vrozená

předškolní věk

otázka „kolik" (je čeho, je Ti let, máš sourozenců)

počítání částí těla (dvě oči, jeden nos, deset prstů), resp. věcí

hry s číslicemi (magnetky na ledničce,...)

dny v týdnu, měsíce v roce

adresa s číslem domu

limit: něčeho je „moc"

Je matematika nepřítel? Proč? – II

- Matematika versus humanitní obory
  - po roce 1989 „záplava" humanitních oborů atraktivních mj. i tím, že do té doby nemohly být rozvíjeny
- Nevhodná osvěta
  - technický pokrok a vědy, které jej přinášejí – matematika, fyzika, technické obory – uváděny jako příčina „zkázy lidstva" (Hirošima, Černobyl a další příklady)
  - neporozumění matematice vystavováno na odiv známými osobnostmi „showbyznysu"
- Obtížnost pro dnešní průměrné studenty
  - procento studující populace v 90. letech 20. století a dnes
  - módní diagnózy (dysgrafie, dyskalkulie, dyslexie, …)

„Mezní" pojmy – úroveň 1 - I

- Základní operace, inversní operace

  školní věk

násobilka, procvičování násobilky, násobilka dvou, tří, …, devíti?
komutativní operace?

odčítání jako inversní (opačná) operace k sčítání

dělení jako inversní operace k násobení

-Vstupenka do kina stojí 7 korun, 6 kamarádů šlo do kina, kolik zaplatili?

-Šest kamarádů za vstupenky do kina zaplatilo 42 korun. Kolik stála jedna?

„Mezní“ pojmy – úroveň 1 - II

- Zaokrouhlování

  - je skutečným problémem bez ohledu na věkovou kategorii a úroveň vzdělávání

  - kolik je 10,0:6,0? 1,67? 1,666666…? místa na displeji kalkulačky?

  - Metodika hodnocení výsledků výzkumu v roce 2004, …, 2011

- pojem přesnosti činí problémy nejen na základní škole, ale i na střední a vysoké škole (praktikum – počet míst na kalkulačce?). A dokonce i při vyhodnocení vědeckých výsledků – ukázka tabulky z Metodiky hodnocení VaV

„Mezní" pojmy – úroveň 1 - II

- Trojčlenka (úměra)

  všechny věkové kategorie

  (je problémem bez ohledu na věkovou kategorii a úroveň vzdělávání)

- Příklad 1: vyúčtování služeb

  náklady na teplo

	uživatel	celek	náklad
40% dle ploch	71,5 m^2	1072,9 m^2	224 942,40
60% dle spotřeby	954 HA	13 632 HA	337 413,60
náklad	38 603,58	562 356,00	562 356,00

„Mezní“ pojmy – úroveň 1 - III

- Příklad 2: trojčlenka pro radiologické asistenty

Zlý sen vrchní sestry

V jedné nejmenované nemocnici byli zvyklí na dodávku ampulí s lékem, který se přidával do infuzí. Ampule měly vždy objem V a koncentrace účinné látky v ní byla p % objemových. Personál měl příkaz vrchní sestry dávat do infuze o výsledném objemu W vždy jednu ampuli léku.

Jednou dodala lék jiná firma a ampule měly objem dvojnásobný, tj. $2V$, koncentrace účinné látky byla také dvojnásobná. Vrchní sestra přikázala dávat do infuzí polovinu obsahu ampule.

Co myslíte, je to správný příkaz??

„Mezní" pojmy – úroveň 1 - IV

- Trojčlenka ještě jednou – probuzení (řešení)

označení: objemy v cm^3 (ml)

W … výsledný objem infuze, *V* … objem ampule první firmy

p … koncentrace účinné látky v objemových procentech

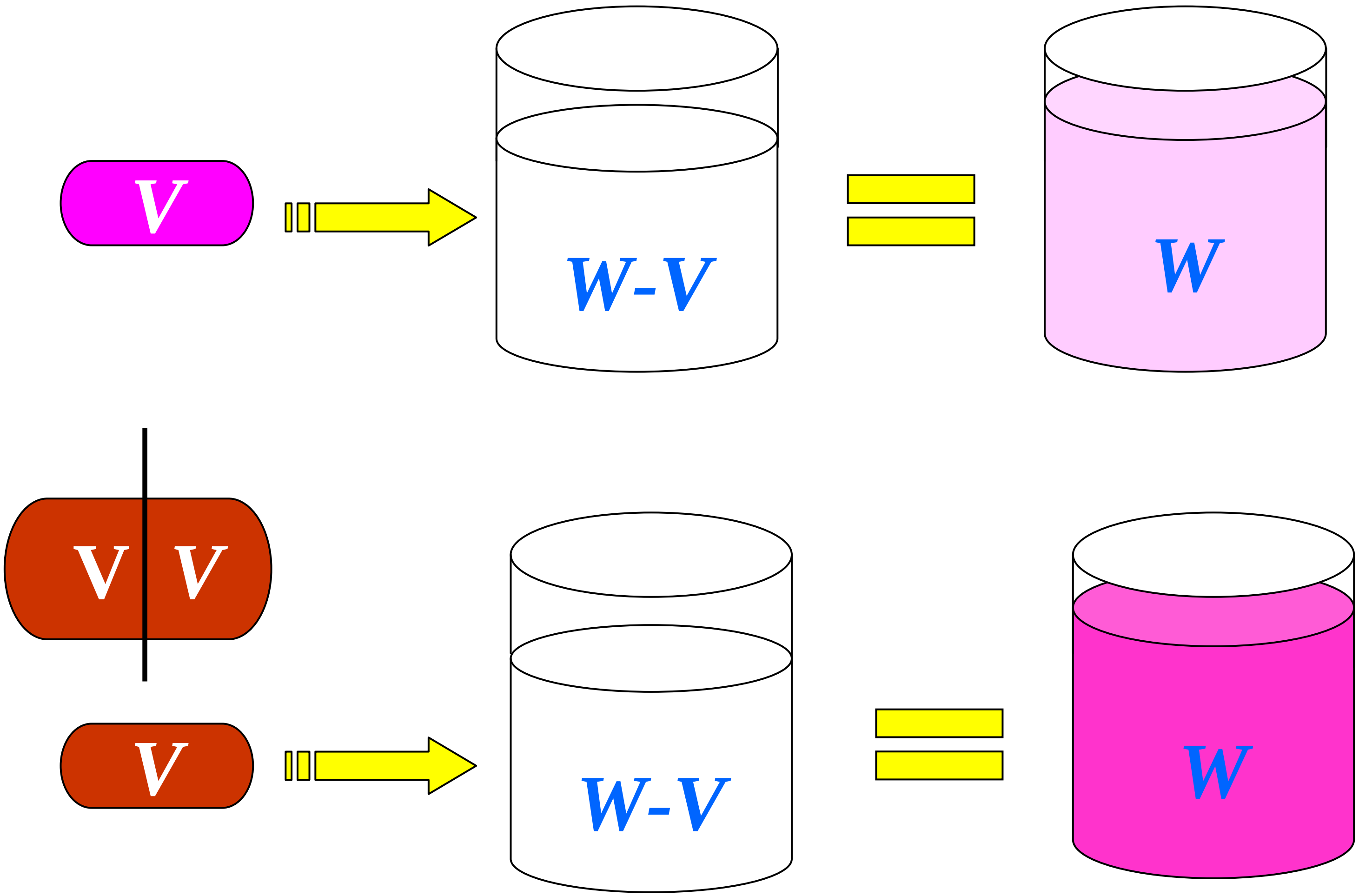
objem účinné látky $U = \left(\frac{p}{100}\right)V$

předepsaná koncentrace účinné látky v infuzi $q = 100 \cdot \frac{U}{W} = \frac{pV}{W}$

Koncentrace účinné látky podle nového příkazu $\overline{p} = 2p \Rightarrow \overline{q} = \frac{2pV}{W} = 2q$

Závěr: Snad nebyla dvojnásobná dávka smrtelná.

Řešení úlohy názorně



„Mezní" pojmy - úroveň 2 - I

- Logaritmus (počítání s mocninami)

  střední škola

$$1000 = 10^3 = \left(\frac{1}{10}\right)^{-3}, \quad \frac{1}{1000} = 10^{-3} = \left(\frac{1}{10}\right)^{3}$$

$$64 = 8^2 = 4^3 = 2^6 = \left(\frac{1}{8}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-6}$$

$$2 = 4^{1/2} = 8^{1/3} = 16^{1/4} = 32^{1/5} = 64^{1/6} = ...$$

$$A = Z^a = \left(\frac{1}{Z}\right)^{-a}, \quad \frac{1}{A} = Z^{-a} = \left(\frac{1}{Z}\right)^{a}$$

$$Z^a Z^b = Z^{a+b}, \quad \frac{Z^a}{Z^b} = Z^{a-b}, \quad \left(Z^a\right)^b = \left(Z^b\right)^a = Z^{ab}$$

násobení mocnin … sčítání exponentů

umocňování mocnin … násobení exponentů

„Mezní“ pojmy – úroveň 2 - II

- Logaritmus (definice)

  střední škola

$$1000 = 10^3 = \left(\frac{1}{10}\right)^{-3}, \log_{10} 1000 = 3, \log_{\frac{1}{10}} 1000 = -3$$

$$\frac{1}{1000} = 10^{-3} = \left(\frac{1}{10}\right)^{3}, \log_{\frac{1}{10}} \frac{1}{1000} = 3, \log_{10} \frac{1}{1000} = -3$$

$$A = Z^B = \left(\frac{1}{Z}\right)^{-B} \quad (Z > 0, Z \neq 1)$$

$$\log_Z A = \log_{\frac{1}{Z}} \frac{1}{A} = B, \quad \log_Z \frac{1}{A} = \log_{\frac{1}{Z}} A = -B$$

$$1 = Z^0, \ Z = Z^1, \quad \log_Z 1 = 0, \ \log_Z Z = 1$$

Logaritmus čísla *A* při (kladném a různém od jedné) základu *Z* je exponent (mocnitel), na který je třeba mocnit základ, abychom dostali číslo *A*.

„Mezní“ pojmy - úroveň 2 - III

- Logaritmus (vlastnosti)

střední škola

$$A = Z^a,\ B = Z^b,\ AB = Z^a Z^b = Z^{a+b}$$

$$a = \log_Z A,\ b = \log_Z B$$

$$a + b = \log_Z (AB)$$

$$\log_Z (AB) = \log_Z A + \log_Z B$$

$$\log_Z \left(\frac{A}{B}\right) = \log_Z A - \log_Z B$$

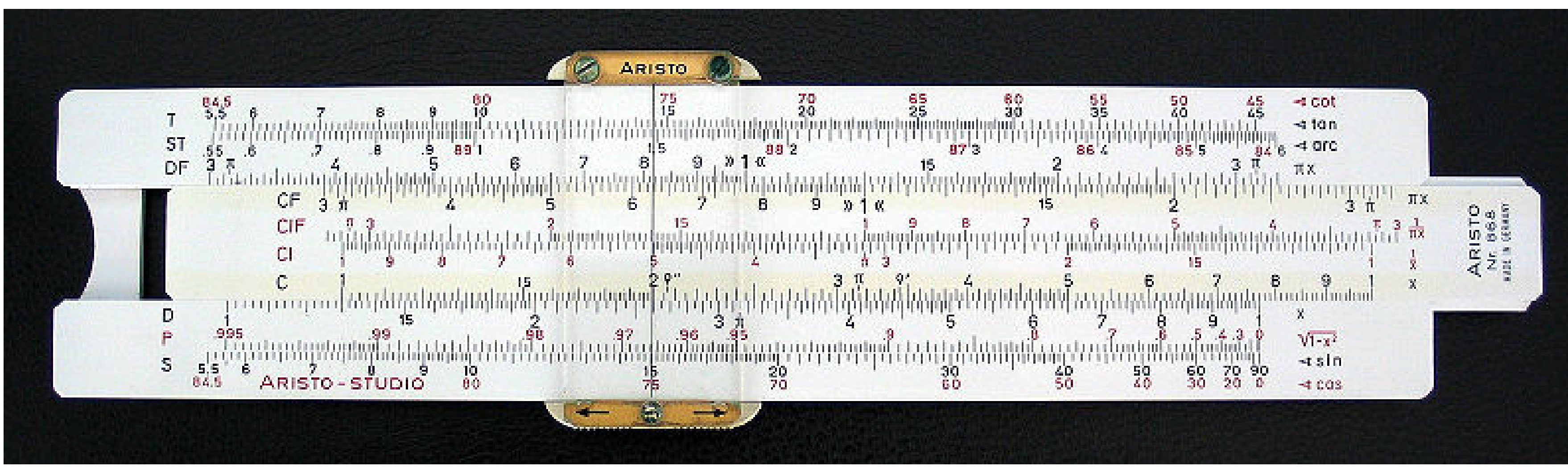
$$A^m = \left(Z^a\right)^r = Z^{ar}, \cdots \log_Z \left(A^m\right) = ar = r \log_Z A$$

$$\text{trik: } A = Z^{\log_Z A} = Y^{\log_Y A},\ \log_Z A \cdot \log_X Z = \log_Y A \cdot \log_X Y$$

Proč to dělá problémy? Byly „zavrženy“ názorné pomůcky převádějící násobení na sčítání, zastínily je kalkulačky.

„Mezní“ pojmy – úroveň 2 - IV

- Vědci o logaritmování
  - V. Obešlo: O logarithmicko- grafickém počítání I, II, III. Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky **45** (1916), 1 (81-99), 2 (241-283), 3 (475-486).
  - V. Pleskot: O dvojitém logaritmickém papíru. Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky **64** (1935), 3 (R33-R39)

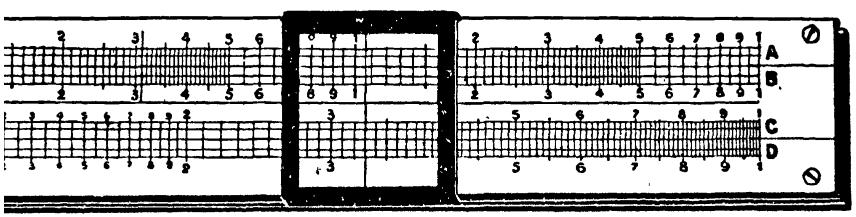


„Mezní" pojmy – úroveň 2 - V

- Vědci o logaritmování

Logarithmické pravítko (Logar. Rechenschieber nebo
Rechenschieber či Rechenstab; règle à calcul) skládá se
ldělitelných částí: *pravítka* (der Stab, la règle) čili části
posouvátka (die Zunge, la réglette), které lze ve žlábku
posouvati, a *běhounu* (der Läufer, l'index), jenž jest
uvný a obsahuje na skleněné destičce jemně vyrytou
dex. Viz obr. 5.

Německu zabývají se výrobou log. pravítka firmy Dennert
e in Altona, A. Nestler in Lahr, A. W. Faber in Stein bei
;, Niethammer, Frankfurt a. M., atd. Se zřetelem k vyučo-
nímu uveďme citát ze zmíněného již článku: H. Müller,
arithmische Rechenstab und die Schule, Zeitschrift . . 38.,
: „Als *Schulstäbe* habe ich lange Zeit Karton-Stäbe benutzt,
eistungsfähigkeit genügend war. Um aber grössere Genauig-



Obr. 5.

erzielen, wurde eine Anzahl von Präzisions-Stäben von der
beschafft und an die Schüler ausgeliehen. Neuerdings hat

Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky.

O logarithmicko-grafickém počítání.

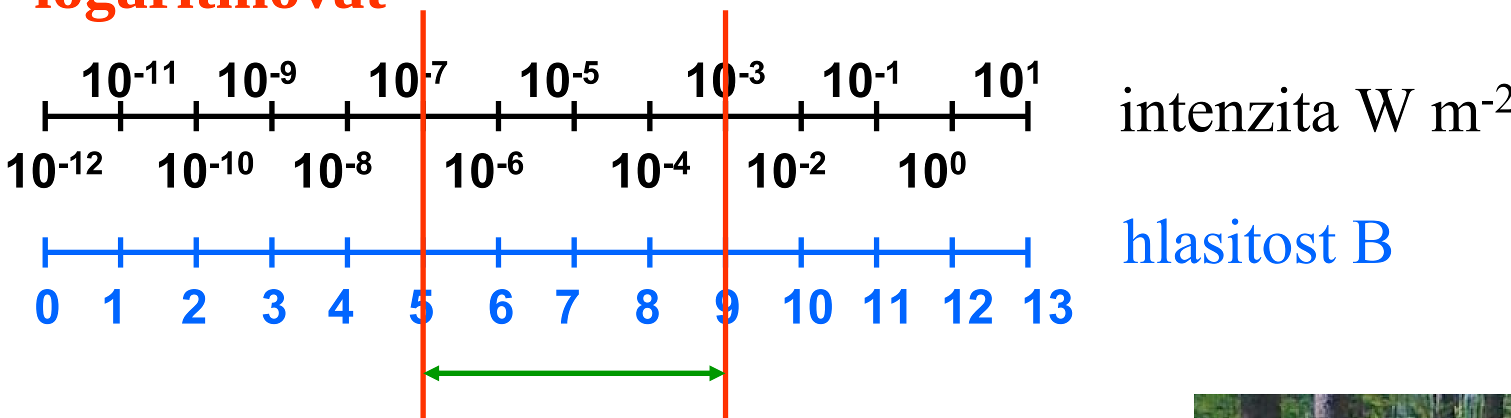
Napsal **Václav Obešlo**.

Úvod.

známo, rozeznáváme:
očítání s čísly úplnými (na př. $345 \times 247 = ?$);
očítání s čísly neúplnými, v kteréžto příčině možno
případy:
o *čísla irracionální*, t. j. taková, která nelze vyjá-
v uzavřeném tvaru zlomkem desetinným (na př. číslo
ále $\sqrt{2}$, atd.).
ı udávají výsledek měření, pokusů atd. a jsou násled-
chyb pozorovacích neúplná nebo jen až k určité mezi
ehlivá.
ı bylo by možno napsati úplně, ale jejich poslední
otky nemají *v praksi* významu, takže píšeme je ve

„Mezní“ pojmy - úroveň 2 - VI

stupnice intenzity a hladiny intenzity aneb uši umí logaritmovat



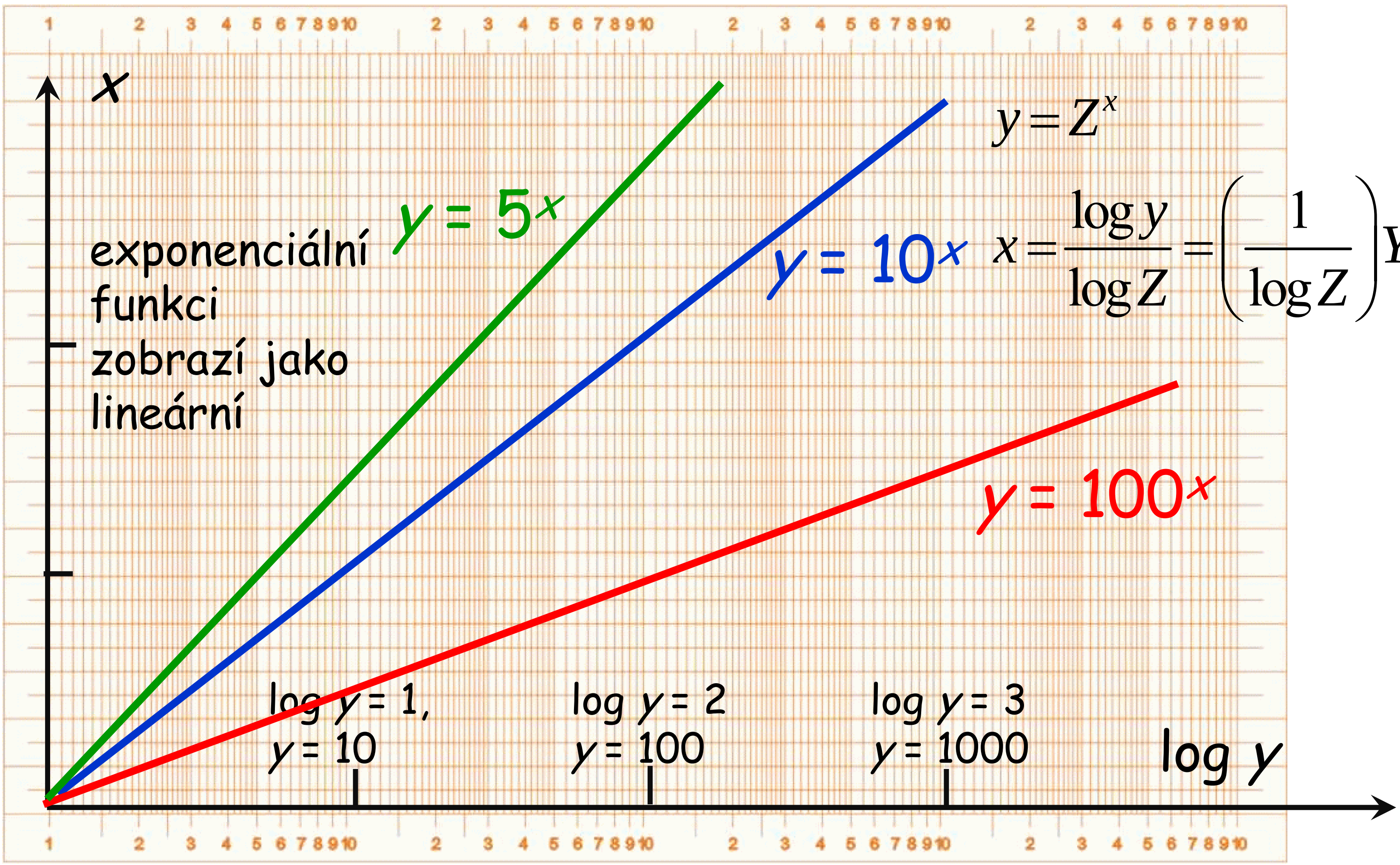
$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{10^{-3}}{10^{-7}} = 10^4,\ L_1 - L_2 = 4,\ \log_{10}\frac{I_1}{I_2} = 4$$

$$\Delta L = 10\cdot\log\frac{I_1}{I_2},\ L = 10\cdot\log\frac{I}{I_0}$$

Aritmetické a geometrické narůstání
hladina intenzity zvuku (hlasitost) (II)
jednotka hlasitosti *L* … 1 decibel

„Mezní“ pojmy – úroveň 2 – VII

- Logaritmické a semilogaritmické papíry



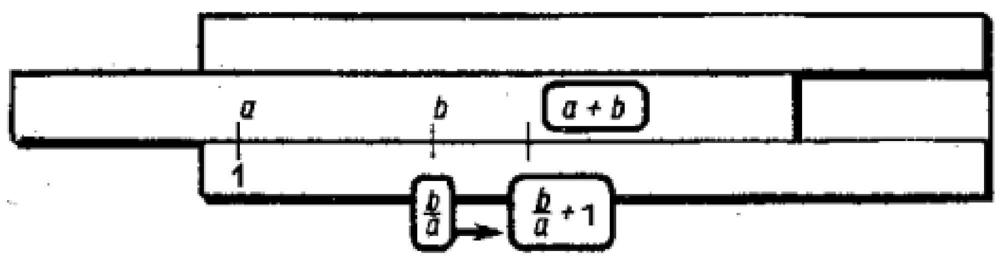
„Mezní“ pojmy – úroveň 2 – VIII

- Logaritmické triky

prý se na logaritmickém pravítku nedá sčítat

Výpočet součtu $a + b$

Postup, kterého použijeme k sčítání na logaritmickém pravítku, záleží v tom, že přičtení čísla b nahradíme přičtením jednotky. Nastavení šoupátka je znázorněno na *obr. 92.*



Obr. 92

Podle pravidla o úměrách zřejmě platí

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{\frac{b}{a}} = \frac{x}{\frac{b}{a}+1}\,; \qquad \frac{x}{\frac{b}{a}+1} = a\,; \quad x = a\left(\frac{b}{a}+1\right) = b + a = a + b\,.$$

Při výpočtu součtu $a + b$ nastavíme tedy jednoho sčítance na stupnici **C** proti 1 stupnice **D** a proti druhému sčítanci na stupnici **C** čteme na stupnici **D** mezivýsledek $\left(\frac{b}{a}, \text{ resp. } \frac{a}{b}\right)$; přičteme k němu jednotku a proti takto získanému číslu $\left(\frac{b}{a} + 1, \text{ resp. } \frac{a}{b} + 1\right)$ na stupnici **D** najdeme opět na stupnici **C** součet $a + b$.

„Mezní" pojmy – úroveň 2 - IX

- Úrokování

  - umíme si spočítat úroky? neumíme – těží z toho banky

- Častá chyba

  - půjčka 100 000 Kč, roční úrok 4%
  - za rok dlužíme (nesplácíme-li) 104 000 Kč?
  - banka úročí po měsících, ale měsíční úrok je jen (4/12)%, vyjde to tedy nastejno
  - kde je chyba: v neznalosti složeného úrokování
  - a při pravidelném splácení si už neumíme vypočítat vůbec nic

Početnice pro měšťanské školy chlapecké i dívčí III. Složili: J. Horčička a J. Nešpor. Schváleno výnosem C.K. Ministerstva osvěty a vyučování ze dne 11. září 1906 č. 22.580. Cena 1K6h. Nákladem J. Otty v Praze 1907.

„Mezní" pojmy - úroveň 2 - X

- Bankovní kalkulátory na Internetu - hypotéky

typ	výše půjčky	roční úrok %	měsíční splátka	splatnost	fixace	celkem ušetříte
1	4 000 000	3,59	23 384	20 let	5 let	508 080
2	4 000 000	4,39	25 069	20 let	1 rok	0
3	4 000 000	4,59	neuvedena	20 let	bez fixace	0
4	4 000 000	4,59	41 629	10 let	bez fixace	0

- Co by mělo být uvedeno

typ	výše půjčky	roční úrok %	měsíční splátka	splatnost	fixace	celkem zaplatíte
1	4 000 000	3,59	23 384	240 měs	5 let	5 612 160
2	4 000 000	4,39	25 069	240 měs	1 rok	6 016 560
3	4 000 000	4,59	25 501	240 měs	bez fixace	6 120 240
4	4 000 000	4,59	41 629	120 měs	bez fixace	4 995 480

„Mezní" pojmy - úroveň 2 - XI

- Výpočet

  je opravdu jednoduchý – stačí geometrická posloupnost

  h – výše půjčky, p – měsíční úrok (procenta/100), s – měsíční splátka

konec měsíce	dlužná částka
prvního	$h(1+p)-s$
druhého	$[h(1+p)-s](1+p)-s$
třetího	$\{[h(1+p)-s](1+p)-s\}(1-p)-s$
n-tého	$h(1+p)^n-s(1+p)^{n-1}-\cdots-s(1+p)-s$
po n měsících	$d(h)=h(1+p)^n-s\sum_{k=1}^{n}(1+p)^{k-1}=\left(h-\dfrac{s}{p}\right)(1+p)^n-s$