53. Mezinárodní matematická olympiáda

Martin Panák, MU Brno

Padesátý třetí ročník Mezinárodní matematické olympiády se uskutečnil od 4. do 16. července 2011 v Argentině, v městě Mar del Plata. Soutěže se zúčastnilo 548 soutěžících ze 100 zemí.

České družstvo tvořili tito žáci: *Michal Buráň* z Gymnázia J. A. Komenského v Uherském Brodu, *Michal Kopf* ze Slezského gymnázia v Opavě, *Anh Dung Le* z Gymnázia Tachov, *Jan Stopka* z gymnázia na tř. Kpt. Jaroše v Brně, *Martin Töpfer* z Gymnázia Nad Štolou v Praze a *Josef Svoboda* z Gymnázia Frýdlant nad Ostravicí. Účast českého týmu byla z větší části dotována ministerstvem mládeže, školství a tělovýchovy (zhruba z osmdesáti procent), zbylé prostředky poskytl *Nadační fond Karla Janečka na podporu vědy a výzkumu*, bez jehož pomoci by se český tým soutěže jen obtížně zúčastnil.

Pro vedoucí jednotlivých národních delegací, kteří tvoří dohromady mezinárodní jury, začala olympiáda již čtvrtého července. Jury vybírala z tzv. shortlistu, to jest užšího výběru z návrhů zaslaných z mnoha států, šestici soutěžních úloh. Letos se do výběru dostala i česká úloha studenta MFF UK v Praze, stříbrného medailisty z 50. IMO v Brémách, Josefa Tkadlece. Tato úloha byla vesměs hodnocena jako nejpěknější ze všech (její krásu může čtenář ocenit sám, text úloh je součástí tohoto článku; jedná se o úlohu číslo pět). Z další agendy jury jmenujme schválelní pořadatelství olympiády v roce 2016, a to pro Brazílii.

Mezinárodní matematická olympiáda se vrátila do Mar del Plata po patnácti letech. V současné světové ekonomické situaci totiž nebylo snadné najít pořadatele olympiády a argentinští organizátoři vzali toto břemeno na sebe, po relativně nedávném odřeknutí původně zamýšlené země. Soutěžící a pedagogičtí vedoucí přijeli do Mar del Plata 8. července. Pro většinu týmů to znamenalo velmi dlouhou cestu, českému družstvu konkrétně trvala cesta více než dva dny. Družstva ze severní polokoule se navíc musela vyrovnat s tím, že na jižní polokouli je panujícím ročním obdobím zima, že slunce je nutné hledat na severu a v neposlední řadě, že se vír v umyvadle točí na opačnou stranu. Ubytováni byli v hotelu Providence, což je nejprestižnější hotel ve městě, který byl zbudován na konci třicátých let minulého století na krásné pláži přímo u Atlantického oceánu. Tento bylo možné pronajmout pro potřeby olympiády díky tomu, že se tato konala v zimě (průměrná teplota byla přibližně 8° Celsia), tedy mimo turistickou sezonu. Slavnostní zahájení olympiády se konalo v místním divadle 9. července.

Soutěžními dny byly 10. a 11. červenec. Účastníci každý z těchto dnů řešili během čtyř a půl hodiny tři příklady.

V dalších dnech pobytu byly pro soutěžící připraveny nejrůznější exkurze a soutěže. Vedoucí se pak věnovali opravám úloh svých žáků. Řešení studentů jsou po soutěži zkopírována a nezávisle opravena též koordinátory, což jsou zkušení matematici z celého světa, kteří přijedou na pozvání pořadatelů. Po opravách se vedoucí a koordinátoři sejdou, porovnají bodová ohodnocení, která udělili, a snaží se dospět ke shodě. Celý proces oprav trvá tři dny.

V českém družstvu se opět po loňském úspěšném ročníku všichni členové dočkali nějakého ocenění. Anh Dung Le obhájil svůj bodový zisk 23 bodů z minulého ročníku a tím i stříbrnou medaili, Jan Svoboda získal bronzovou medaili a zbylí členové týmu pak obdrželi čestná uznání za jednu bezchybně vyřešenou úlohu. Celkově získalo družstvo 80 bodů, což nás zařadilo na dělené 47. místo v pořadí zemí (výsledek družstva je dán součtem bodů jednotlivých jeho členů). K lepšímu umístění nám nepomohl ani bratranec slovenského zlatého medailisty Martina Vodičky, Michal Kopf. Slovenská družina tak získala o pět bodů více, což stačilo na 45. místo.

Absolutním vítězem olympiády se stal jediný účastník, který dosáhl maximálního bodového zisku, Singapuřan Jeck Lim. K velkému překvapení došlo v soutěži družstev, kterou poprvé vyhrála Korea. Čína skončila druhá, třetí pak Spojené státy americké.

Soutěžní úlohy:

1. soutěžní den (10. 7. 2012)

1. Je dán trojúhelník ABC. Nechť J je střed kružnice připsané ke straně BC a nechť M je bod jejího dotyku s touto stranou. Dále nechť K a L značí po řadě body dotyku této kružnice s přímkami AB a AC. Průsečík přímek LM a BJ označme F a průsečík přímek KM a CJ pak G. Dále nechť S je průsečík přímek AF a BC a konečně nechť T je průsečík přímek AG a BC. Dokažte, že M je středem úsečky ST.
(Kružnice připsaná trojúhelníku ABC ke straně BC je kružnice, která se dotýká úsečky BC, polopřímky opačné k polopřímce BA a polopřímky opačné k polopřímce CA.) *(Řecko, Evangelos Psychas)*

2. Je dáno celé kladné číslo $n \geq 3$ a kladná reálná čísla $a_2, a_3, \ldots, a_n$ taková, že $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$. Dokažte, že pak platí nerovnost

$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \cdots (1 + a_n)^n > n^n.$$

(Austrálie, Angelo di Pasquale)

3. *„Hra na chytrou horákyni“* je hrou mezi dvěma hráči A a B. Pravidla hry závisejí na dvou kladných celých číslech k a n, která jsou známa oběma hráčům.

Na začátku hry zvolí hráč A celá čísla x a N, kde $1 \leq x \leq N$, a z nich prozradí (po pravdě) hráči B pouze číslo N, číslo x si nechá pro sebe. Hráč B se nyní snaží získat informace o čísle x kladením otázek hráči A. Může přitom klást pouze otázky následujícího typu: vybere libovolnou podmnožinu S kladných celých čísel (může vybrat i množinu, kterou již zvolil v některé z předchozích otázek) a zeptá se hráče A na to, zda číslo x leží v S. Hráč B může položit libovolně mnoho takovýchto otázek. Na každou otázku musí hráč A okamžitě odpovědět, a to buď „ano“, nebo „ne“. Při odpovědích však může hráč A lhát, dokonce libovolně mnohokrát; jediným omezením je pouze to, aby mezi každými jeho $k+1$ za sebou následujícími odpověďmi byla alespoň jedna pravdivá. Poté, co hráč B skončí s kladením všech svých otázek, zadá nějakou, nejvýše n-prvkovou, podmnožinu X kladných celých čísel. Pokud číslo x náleží do množiny X, tak hráč B vyhrál, jinak prohrál. Dokažte:

(a) Jestliže je $n \geq 2^k$, tak má hráč B vyhrávající strategii.

(b) Pro každé dostatečně velké celé kladné k (tj. od jisté meze pro každé celé kladné číslo k) existuje číslo $n \geq 1{,}99^k$ takové, že neexistuje vyhrávající strategie pro hráče B. *(Kanada, David Arthur)*

2. soutěžní den (11. 7. 2012)

4. Najděte všechny funkce $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, pro které platí rovnost

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 \;=\; 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a)$$

pro libovolná celá a, b, c splňující $a + b + c = 0$.
($\mathbb{Z}$ značí množinu celých čísel.) *(Jihoafrická republika, Liam Baker)*

5. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem u vrcholu C. Označme D patu výšky z bodu C. Nechť X je bod uvnitř úsečky CD. Označme K ten bod na úsečce AX, pro který $|BK| = |BC|$. Podobně označme L ten bod na úsečce BX, pro který $|AL| = |AC|$. Dále nechť M je průsečík úseček AL a BK. Ukažte, že $|MK| = |ML|$. *(Česká republika, Josef Tkadlec)*

6. Nalezněte všechna celá kladná čísla n, pro která existují nezáporná celá čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ taková, že platí rovnosti

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_n}} = \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \cdots + \frac{n}{3^{a_n}} = 1.$$

(Srbsko, Dusan Dukic)

Na závěr uvádíme jak přehled absolutního pořadí, cen a bodových zisků českých účastníků soutěže, tak celkové pořadí zúčastněných zemí.

Pořadí	**Jméno**	**Body za úlohu číslo**							**Cena**
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**		
85.	Anh Dungh Le	7	7	0	6	3	0	23	S
183.	Josef Svoboda	5	7	0	2	3	0	17	B
303.	Jan Stopka	7	3	0	2	0	0	12	HM
253.	Michal Buráň	7	0	0	3	0	0	10	HM
282.	Martin Töpfer	7	0	0	3	0	0	10	HM
403.	Michal Kopf	7	0	0	1	0	0	8	HM
	Celkem	40	17	0	17	6	0	80	

Tabulka pořadí zemí:

	Země	Medaile			b.
		G	S	B	
1.	Korea	6	0	0	209
2.	ČLR	5	0	1	195
3.	USA	5	1	0	194
4.	Rusko	4	2	0	177
5.–6.	Kanada	3	1	2	159
	Thajsko	3	3	0	159
7.	Singapur	1	3	2	154
8.	Írán	3	2	1	151
9.	Vietnam	1	3	2	148
10.	Rumunsko	2	3	1	144
11.	Indie	2	3	0	136
12.–13.	KLDR	2	1	3	128
	Turecko	1	3	2	128
14.	Tchaj-wan	1	3	0	127
15.	Srbsko	1	2	1	126
16.	Peru	0	3	2	125
17.	Japonsko	0	4	1	121
18.	*Polsko*	0	2	4	119
19.–21.	Brazílie	1	1	3	116
	Bulharsko	1	2	2	116
	Ukrajina	0	3	2	116
22.–23.	Nizozemsko	2	0	3	115
	Velká Británie	1	1	4	115
24.	Belgie	0	4	1	114
25.	Chorvatsko	1	1	3	110
26.	Řecko	1	1	3	107
27.–28.	Austrálie	0	2	4	106
	Hongkong	0	3	1	106
29.	Saúdská Arábie	0	2	3	105
30.	Moldavsko	0	2	3	104
31.–33.	Izrael	0	3	1	102
	Mexiko	1	1	2	102
	Německo	0	2	3	102
34.	Kazachstán	0	1	4	101
35.–36.	Indonésie	0	1	3	100
	Malajsie	0	2	3	100
37.	Portugalsko	1	1	2	96
38.–41.	Bolívie	0	2	1	93
	Francie	0	1	4	93
	Itálie	0	2	1	93
	Maďarsko	0	2	1	93
42.	Tádžikistán	0	0	4	91
43.	Mongolsko	1	0	2	90
44.	*Slovensko*	1	0	2	85
45.	Bělorusko	0	1	2	84
46.	Kolumbie	0	0	3	83
47.–49.	Arménie	0	1	2	80
	Kostarika	0	0	3	80
	Česká republika	0	1	1	80
50.	Rakousko	0	0	4	79
51.	Turkmenistán	0	1	2	78
52.	Švýcarsko	0	0	3	76
53.	Nový Zéland	0	0	2	75
54.–55.	Argentina	0	0	2	74
	Bangladéš (5)	0	1	2	74
56.–57.	JAR	0	0	2	71
	Slovinsko	0	0	2	71
58.	Litva	0	0	3	69
59.	Gruzie	0	0	1	68
60.	Španělsko	0	1	0	64
61.–62.	Ázerbájdžán	0	0	2	60
	Dánsko	0	0	1	60
63.–64.	Chile	0	0	1	59
	Makedonie	0	0	2	59
65.	Finsko	0	1	0	57
66.	Lotyšsko	0	0	0	55
67.	Nigérie	0	0	1	52
68.–69.	Estonsko	0	0	0	50
	Kyrgyzstán	0	0	0	50
70.	Maroko (5)	0	0	2	49
71.–72.	Ekvádor	0	0	1	47
	Švédsko	0	0	1	47
73.–74.	Filipíny (3)	0	0	2	41
	Pákistán (5)	0	1	0	41
75.	Makao	0	0	0	40
76.	Kypr	0	0	0	39
77.	Lucembursko (4)	0	0	1	36
78.	Irsko	0	0	0	34
79.–80.	Honduras (3)	0	0	1	33
	Norsko	0	0	0	33
81.	Portoriko (4)	0	0	1	32
82.	Paraguay	0	0	0	31
83.–84.	Srí Lanka (4)	0	0	1	30
	Uruguay	0	0	0	30
85.	Pobřeží slonoviny (4)	0	0	0	29
86.	Salvador (3)	0	0	0	28
87.	Trinidad a Tobago (5)	0	0	0	26
88.	Tunisko (2)	0	1	0	25
89.	Island	0	0	0	21
90.	Sýrie	0	0	0	19
91.–92.	Panama (3)	0	0	0	17
	Venezuela (3)	0	0	0	17
93.	Guatemala (2)	0	0	0	11
94.	Kosovo	0	0	0	9
95.	Kuba (1)	0	0	0	8
96.	Bosna a Hercegovina	0	0	0	6
97.–98.	Černá Hora (2)	0	0	0	5
	Lichtenštejnsko (2)	0	0	0	5
99.	Uganda (5)	0	0	0	2
100.	Kuvajt (3)	0	0	0	0