



MASARYKOVA UNIVERZITA

Výuka matematiky

od intuice a rutiny
k porozumění a praxi

Jana Musilová

Slovo předem

- ❏ **Všechna tvrzení uvedená v této prezentaci představují osobní názor autorky, ...**
- ❏ **... vzniklý na základě vlastního středoškolského a vysokoškolského studia a potvrzený dlouholetou praxí ve výuce matematiky pro fyziky.**
- ❏ **K některým z předložených snímků je nutný ústní komentář.**
- ❏ **Vše je určeno k diskusi a polemice, které uvítám.**

Úloha na úvod

Po volbách do 200členného parlamentu se do něj dostali poslanci 5 stran a nastala tato situace:

- ❏ Strana B získala dvakrát méně hlasů než strana A.
- ❏ Strana C získala tolik, co strana A.
- ❏ Strana D získala pouze 10% hlasů.
- ❏ Strana E získala také 10% hlasů.

Které dvě strany mohou vytvořit alespoň třipětinovou koalici?

(Z ukázkových testů Moravského gymnázia v Brně.)

Může intuice předcházet porozumění?

- ❏ **Obvyklá (a správná) odpověď je „ANO“.**
- ❏ Jak to koresponduje s naší úlohou?
- ❏ Uchazeč s dobrou matematickou představivostí, řekněme tedy intuicí, na základě zadání okamžitě řekne, že strany A a C (otázka je totiž dost sugestivní – slovo „dvě“).
- ❏ Složitější úloha se už pouhou intuicí zvládnout nedá.

Může „rutina“ předcházet porozumění?

- ❏ **Obvyklá (však nesprávná) odpověď je „NE“.**
- ❏ Jak to koresponduje s naší úlohou?

Celkem 200 křesel, třípětinová většina ... 120 křesel

$E + D \dots 20\% \dots 40$ křesel, $A + B + C = A + 0,5A + A = 2,5A \dots 160$ křesel

$A \dots 64$ křesel, $B \dots 32$ křesel, $C \dots 64$ křesel, $D \dots 20$ křesel, $E \dots 20$ křesel

- ❏ Řešení může rychle najít i ten, kdo intuitivní představu nemá, ale spočítal více podobných příkladů.
- ❏ S dostatkem rutiny lze zvládnout i složitější úlohy.

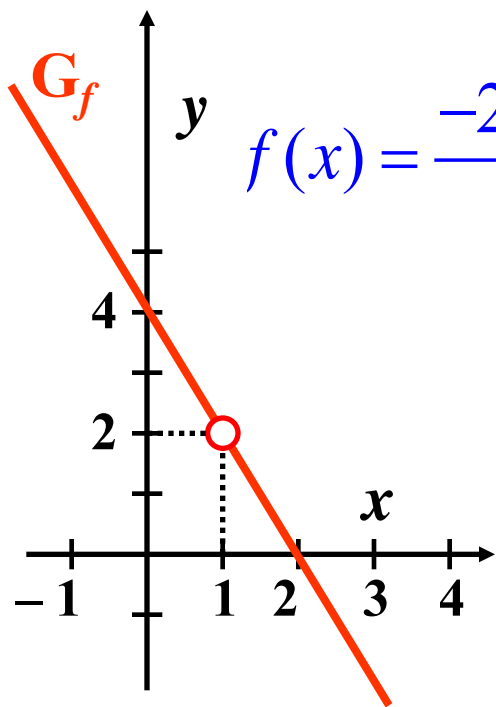
Rutina jako pozitivní prvek

Definice:

Řekneme, že číslo L je limitou funkce $f(x)$ v bodě x_0 , jestliže ke každému kladnému číslu ε existuje okolí O bodu x_0 tak, že pro všechna $x \in O$ platí $|f(x) - L| < \varepsilon$.

- Lze toto pochopit „jen tak“? A negace (číslo L není limitou dané funkce v daném bodě)?
- Vypočtení řady různých limit napomůže pochopení definice.
- Obdobně pro derivaci, jejíž význam je geometricky názorný (výpočet jak z definiční limity, tak podle vzorců z definice vyplývajících).

Ukázka: „rutinní“ výpočet limity vykrácením „nepohodlného jmenovatele“



$$f(x) = \frac{-2x^2 + 6x - 4}{x - 1}, D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}, f(x) = -2x + 4, x \in D_f$$

x	1,200	1,100	1,050	1,020	1,110	1,005	1,002	1,001
$f(x)$	1,600	1,800	1,900	1,960	1,980	1,990	1,996	1,998

x	0,800	0,900	0,950	0,980	0,990	0,995	0,998	0,999
$f(x)$	2,400	2,200	2,100	2,040	2,020	2,010	2,004	2,002

Co si myslíte o možnosti „dělení nulou“? Jde to provést, nebo se tomu lze za určitých podmínek „přiblížit“?

Rutina jako negativní prvek

Úloha:

Do infuze o celkovém objemu $W = 200$ ml se přidávají dvě účinné látky. První z nich je v ampulích o objemu $V_1 = 20$ ml v koncentraci $p_1 = 30\%$ (objemových), druhá v ampulích o objemu $V_2 = 40$ ml v koncentraci $p_2 = 50\%$. Výsledná koncentrace obou účinných látek v infuzi má být $q = 15\%$ a poměr jejich koncentrací $q_1 / q_2 = p = 0,5$.

Kolik ml roztoku 1 a kolik ml roztoku 2 je třeba dát do infuze?

Řešení dosazením do naučených vzorců:

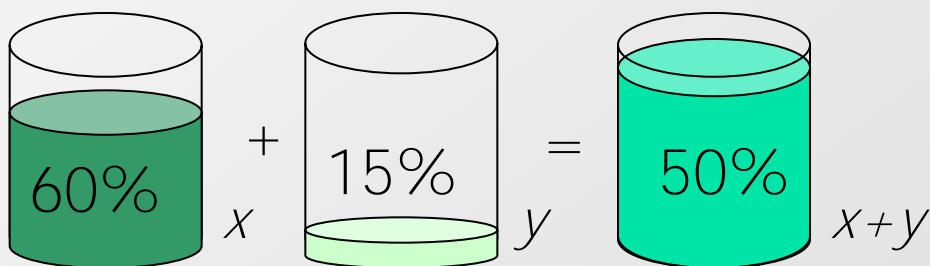
$$x = \frac{p q W}{p_1 (1 + p)}, y = \frac{q W}{p_2 (1 + p)} \Rightarrow x \doteq 33, y = 40$$

Příběh hypotetický jen zdánlivě – I

- ☒ Sultán chtěl provdat dceru alespoň průměrně chytrému ženichovi. Do užšího výběru měli projít úspěšní řešitelé úlohy (tzv. testu předpokladů), kterou pro ten účel vymyslel sultánův šašek (autor):

V jakém poměru musíme smíchat 60% roztok s 15% roztokem, aby vznikl roztok 50%?

- ☒ Řešení je toto:



$$60x + 15y = 50(x + y) \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{2}{7}$$

Příběh hypotetický jen zdánlivě – II

- Sultán dal úlohu posoudit svým čtyřem vezírům-manažerům. Ti nad ní hloubali a nakonec se mezi nimi a šaškem odehrála tato e-mailová diskuse:

Vezíři: Pokud neznáme vzorec, tak jsme totálně vyhořeli.

Šašek: Mně se úloha líbí – obejdu se totiž bez vzorců, neboť si (bohužel) nikdy žádné nepamatuji.

Vezíři: Lámali jsme to tady čtyři a museli jsme si napsat starému čaroději na chemii o vzorec. To je dost jednoznačné měřítko – pokud to nezvládneme v klidu s dostatkem času my, pak to do testu nemůže. Princezna by zůstala na ocet.

Šašek: Jestli ho neranila mrtvice, žije dodnes.

Příklad „rutiny“ jinde ...

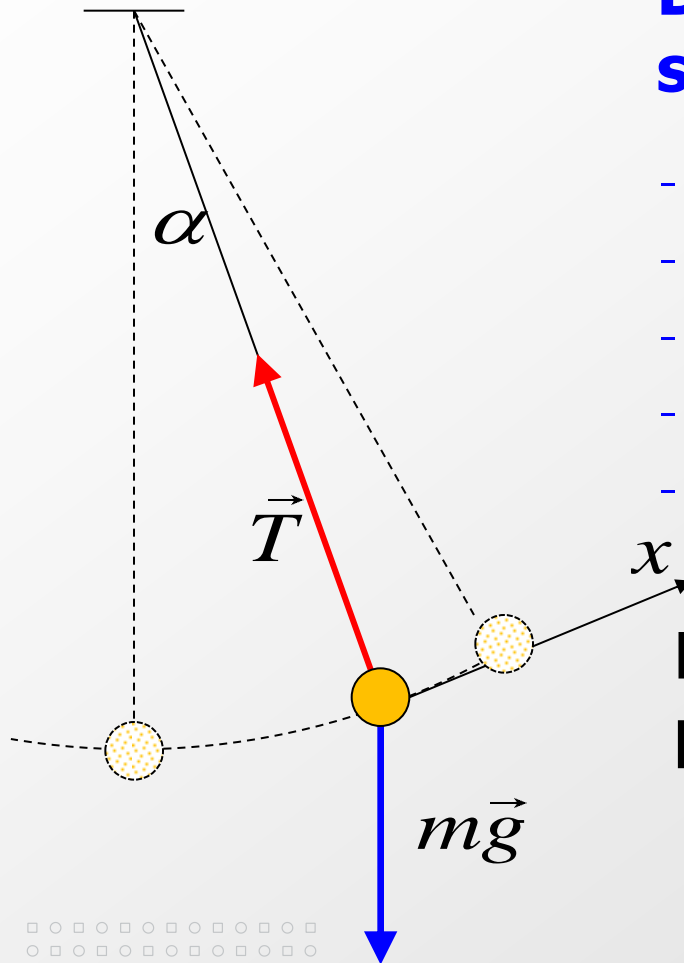


Čtení not ... „rutina“ klavíristy

- **Není to zábavné.**
- **Není na tom moc co k porozumění.**
- **Přesto o tom nikdo nepochybuje.**



... a „rutina“ ve výuce matematiky a fyziky



Definice ... rutina gymnazisty, studenta matematiky a fyziky, ...

- goniometrické funkce
- úprava algebraických výrazů
- řešení soustav lineárních rovnic
- funkce, čtení grafů
-

Příběh skutečný: postupné výroky studentky

$$T_x = T \sin \alpha, T_x = T \cos \alpha,$$

$$T_x = T \tan \alpha, T_x = \text{tak už nevím}$$

Neúspěchy žáků v matematice - mýty

- ❏ matematika je nezábavná a suchopárná
- ❏ **nebudu ji v životě nikdy potřebovat**
- ❏ špatné učebnice
- ❏ **málo hodin výuky**
- ❏ poruchy učení (existují, ale lze je překonávat)
- ❏ **škola, rodina**
- ❏ **a další ...**

Neúspěchy žáků v matematice – některé skutečné příčiny

- ❏ **malá pracovitost**
- ❏ **povrchní popularizační snahy – „zábava“ místo skutečné práce**
- ❏ **kalkulačky místo hlavy**
- ❏ **Google místo vlastní paměti**
- ❏ **vymizení inteligentních pomůcek**

Kalkulačka místo hlavy

☒ Úloha z mechaniky:

Těleso o hmotnosti 80 kg spadne z výšky 15 m na zem a zabrzdí se na dráze 20 cm. Určete velikost průměrné brzděné síly. Tíhové zrychlení zaokrouhlete na 10 ms^{-2} .

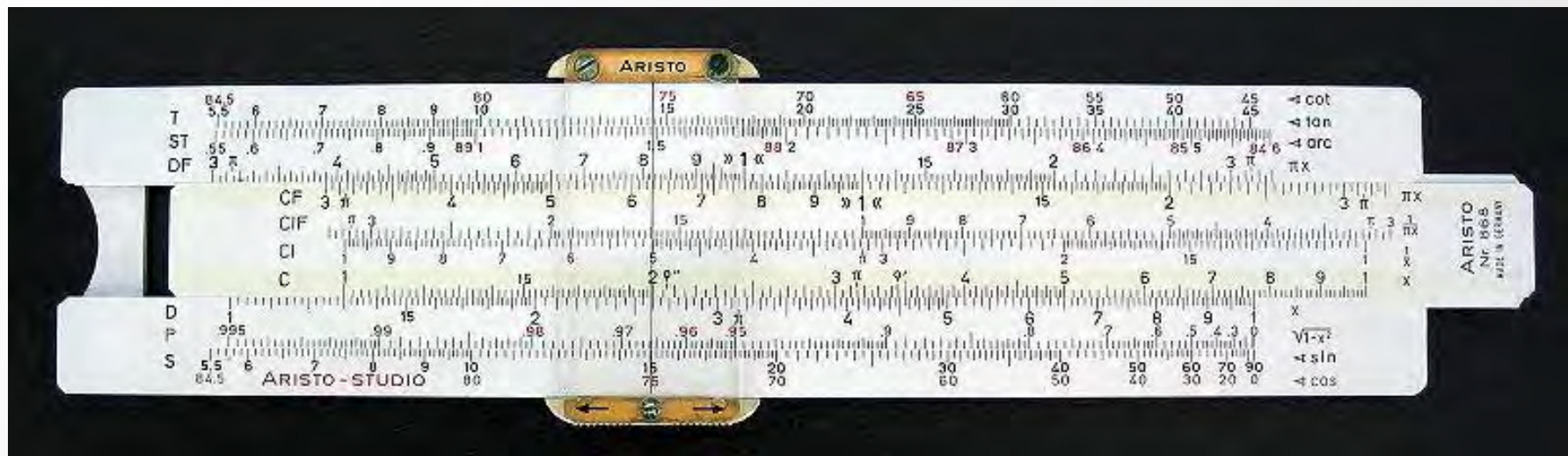
☒ Výpočet:

$$mgh = Fs \Rightarrow F = \frac{mgh}{s} = \frac{80 \cdot 10 \cdot 15}{0,2} = 6 \cdot 10^4 \text{ N}$$

☒ Studentka u zkoušky:

„Na to si musím vzít kalkulačku.“ Několik minut hledání v tašce. Výsledek řádově chybně.

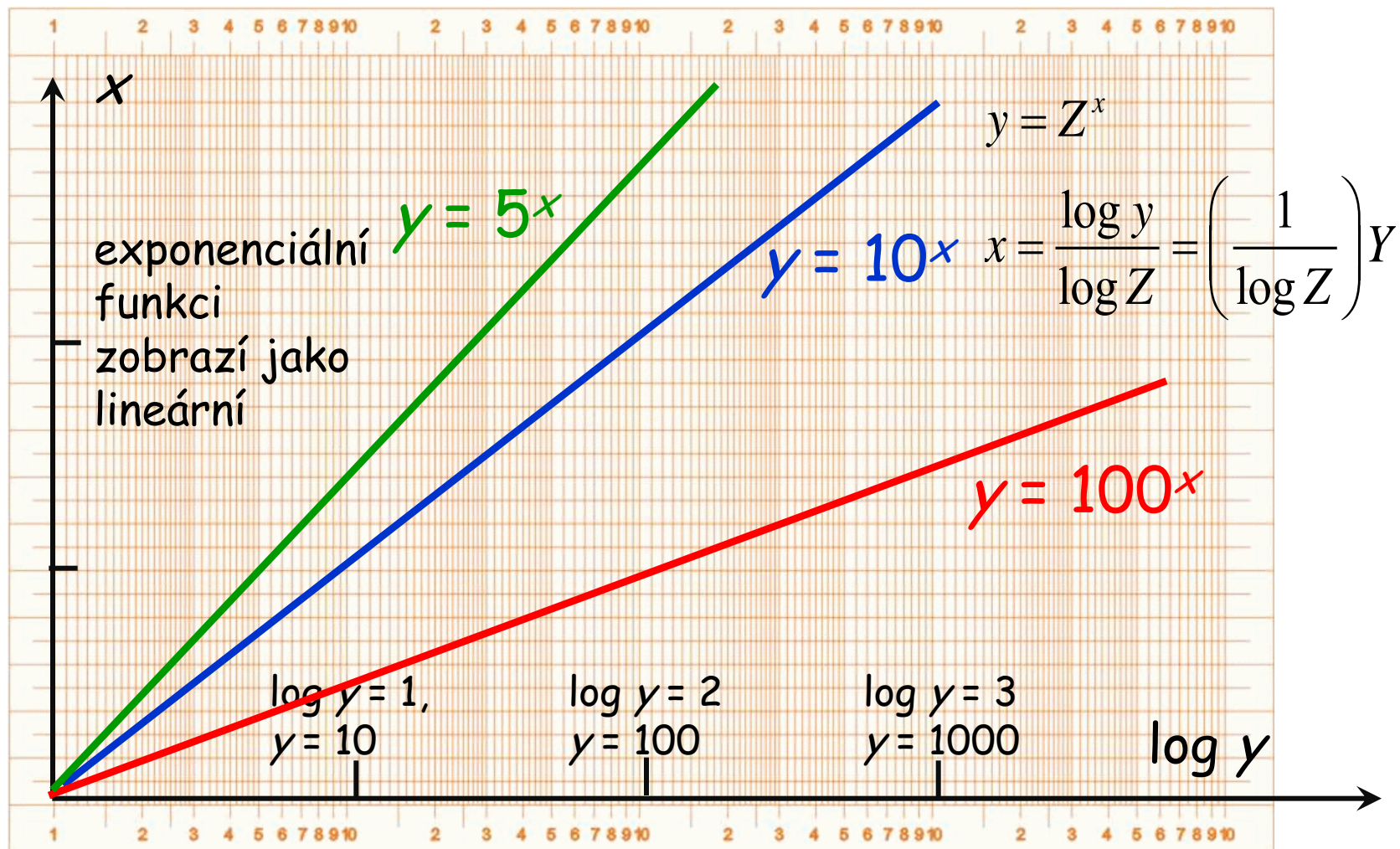
Inteligentní pomůcky – I



- V. Obešlo: O logaritmicko- grafickém počítání I, II, III. Časopis pro pěstování matematiky a fyziky **45** (1916), 1 (81-99), 2 (241-283), 3 (475-486).
- V. Pleskot: O dvojitém logaritmickém papíru. Časopis pro pěstování matematiky a fyziky **64** (1935), 3 (R33-R39).

Inteligentní pomůcky – II

- Logaritmické a semilogaritmické papíry



„Zábavná“ matematika?

☞ Projekt „Matematika s chutí“

Z médií: 15. 2. 2012, Praha, denik.cz, K. Perknerová

- Do škol přichází projekt Matematika s chutí.
- Garantují ho přední české osobnosti.
- Už se na to nemůžeme dívat. Znalosti dětí klesají, zájem o matematiku se limitně blíží nule, jsme na tom nejhůř ze všech vyspělých zemí.
- Tohle si řekly vynikající mozky české vědy i průmyslu a vymyslely projekt Matematika s chutí.

Matematika s chutí - cíle

- Projekt je uvážlivou reakcí na prokázané zhoršení výsledků povinného vzdělávání v matematice i na doložené velmi negativní postoje českých žáků k její výuce.
- K příčinám patří přílišné spoléhání škol na to, že žákům pomůžou rodiče, předčasná abstrakce ve výuce a především skutečnost, že běžná škola se sice snaží předat žákům řadu poznatků, ovšem metody výuky ignorují dovednosti, které jsou potřebné k jejich získávání.
- Výuka je zaměřena spíše na reprodukci a imitaci než na tvořivost žáka a na rozvoj jeho intelektu a osobnosti. Objevovat, klást si otázky a hledat na ně odpovědi se žáci nemůžou naučit tím, že budou sebestoporněji sledovat výklad učitele. Učitel v nich musí vzbudit potřebu poznávat, musí je přivést k činnostem, při nichž si budou sami klást otázky a hledat na ně odpovědi, budou sami pátrat a objevovat.

Matematika s chutí – odborní garanti

- RNDr. Dana Straková, Ph.D., MFF UK (fyzika), nyní manažerské a poradenské funkce (poradkyně ministrů školství)
- Ing. Tomáš Jelínek, ČVUT, CERGE-EI nedokončil, manažerské funkce
- RNDr. Oldřich Botlík, CSc., MFF UK (matematika), nyní OSVČ, KALIBRO
- RNDr. David Souček, MFF UK (matematika, teorie strojů), OSVČ, KALIBRO, práce pro MŠMT, PČR
- Simona Weidnerová, výkonná ředitelka ISEA, spoluautorka Bílé knihy, reformy, Věcného záměru zákona o finanční pomoci studentům
- Prof. PhDr. Petr Matějů, CSc., FF UK (sociologie) profesura MU, BK,..
- Doc. Ing. Daniel Munich, Ph.D., akademický ekonom, CERGE-EI, NERV, poradce EU v oblasti školství,

Matematika s chutí – projekty

- **Voda:** Světové vodní zdroje se zmenšují, cena vody stále roste. Sílí tak tlak na úspory a vůbec na lepší hospodaření s vodou. V rámci projektu využijeme jednoduchou matematiku, abychom si posvítili na to, jak jsme na tom u nás: kde vodou plýtváme a jak s ní můžeme lépe hospodařit.
- **Reklama kolem nás:** Na člověka údajně „zaútočí“ několik tisíc reklamních sdělení denně. Jakkoliv se toto číslo zdá neuvěřitelné, může si je každý snadno ověřit. Prosté počítání reklamních sdělení pak může být východiskem k uvažování o světě reklamy jako takovém, ke snaze vědomě uchopit a kategorizovat jednotlivé složky tohoto působivého součtu. Která sdělení jsou cílena přímo na mě? Na jaké mé vlastnosti reklama míří a jak mě ovlivňuje? Jaký by byl svět bez ní?

Matematika s chutí – další témata

- Pohyb (tachometry)
- Srovnávání (finančník srovnává výnosnost různých investic; zákazník hledá výrobky s nejlepším poměrem „cena/výkon“; statik počítá síly působící na konstrukci; ...)
- Meteorologie (amatérská meteorologie, srovnávání dat z Internetu)
- Kniha rekordů
- Hry – taktika a strategie
- Energetika, obnovitelné zdroje (...Analyzujeme-li politické proklamace na toto téma za použití jednoduché matematiky, nalezneme rozpory...)
- Obchodník musí umět počítat (úlohy související se reálným světem)
- Disc-golf

Definice – věta – důkaz - příklad

- **Standardní postup matematiků při výuce na VŠ**
není vhodný pro všechny obory, i když matematiky využívají
- **Zkouška z mechaniky a molekulové fyziky:**
V p-T diagramu nakreslete graf izochorických dějů v ideálním plynu pro dva různé objemy $V_1 < V_2$.
- **Studentka učitelství M-F:**
(zkoušku z Matematické analýzy předtím složila s klasifikací „A“ – byla tedy „naučená výborně“):
 - správně napíše stavovou rovnici $pV = nRT$
 - vztah $p = \left(nRV^{-1}\right)T = \text{konst} \cdot T$ napíše až na pokyn učitele
 - že se jedná o lineární funkci teploty (a grafem je tedy přímka) odpoví až na další dotaz, graf už nakreslí sama
 - příčina: proměnné se místo x a y jmenovaly V a p