Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

Svoč 2009

Luděk Kleprlík

Sobolevovy prostory a skládání zobrazení

Katedra matematické analýzy

Kategorie: (S1) Matematická analýza – Teorie funkcí a funkčních prostorů

Vedoucí práce: RNDr. Stanislav Hencl, Ph.D.
Studijní program: Matematika, matematická analýza

2009

Obsah

Název práce: Sobolevovy prostory a skládaní zobrazení
Autor: Luděk Kleprlík
Datum narození: 16.4.1985
e-mail: l.kleprlik@seznam.cz
Ročník studia: 2.
Obor studia: navazující magisterské studium Matematická analýza
Katedra (ústav): Katedra matematické analýzy
Vedoucí práce: RNDr. Stanislav Hencl, Ph.D.
e-mail vedoucího: hencl@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: V předložené práci studujeme, kdy pro funkci u ze Sobolevova prostoru a homeomorfismus f leží složené zobrazení $u \circ f$ v nějakém vhodném Sobolevově prostoru a to v závislosti na vlastnostech zobrazení f. Ukážeme, že má-li f konečnou distorzi, potom za dostatečné integrability q-distorze $K_q = |Df|^q/J_f$ operátor složení $T_f(u) = f \circ u$ zobrazuje funkce z prostoru $W^{1,q}_{loc}$ do prostoru $W^{1,p}_{loc}$. Pro důkaz tohoto tvrzení budeme muset nejdříve zjistit, kdy inverzní zobrazení f^{-1} zobrazuje množiny nulové míry na množiny nulové míry (tj. splňuje Luzinovu (N^{-1}) podmínku). Dokážeme, že je-li $1 \leq q \leq n$ a q-distorze K_q je dostatečně integrovatelná, potom tuto podmínku splňuje. Poté ukážeme, že tento výsledek je optimální a to tak, že zkonstruujeme homeomorfismy f, které těsně nebudou splňovat předpoklad dostatečné integrability K_q a přitom selže Luzinova (N^{-1}) podmínka.
Klíčová slova: Homeomorfismus s konečnou distorzí, (N^{-1}) Luzinova podmínka, Operátor složení, Sobolevovy prostory

KAPITOLA 1

Úvod

V této práci se budeme zabývat problémem diferencovatelnosti složeného zobrazení. Budeme zkoumat, kdy je složené zobrazení $u \circ f$ slabě diferencovatelné (respektive leží ve vhodném Sobolevově prostoru) v závislosti na vlastnostech zobrazení f. Sobolevovým prostorem $W^{1,p}$ budeme značit množinu funkcí z L^p, jejíž zobecněná derivace leží také v L^p (přesná definice je uvedena v následující kapitole).

Definice 1.1. Buď Ω_1, Ω_2 otevřené podmnožiny $\mathbb{R}^n$ a f zobrazení z $\Omega_1 \to \Omega_2$. Řekneme, že operátor T_f definovaný

$$(T_f u)(x) := u\big(f(x)\big) \text{ pro } x \in \Omega_1,$$

je spojitý z $W^{1,q}_{loc}(\Omega_2)$ (respektive $W^{1,q}_{loc}(\Omega_2) \cap C(\Omega_2)$) do $W^{1,p}_{loc}(\Omega_1)$, pokud pro každou funkci $u \in W^{1,q}_{loc}(\Omega_2)$ (resp. $W^{1,q}_{loc}(\Omega_2) \cap C(\Omega_2)$) platí $T_f u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega_1)$ a existuje konstanta K tak, že platí

$$\|DT_f u\|_{L^p(\Omega_1)} \leq K \|Du\|_{L^q(\Omega_2)}, \tag{1.1}$$

pro každou funkci $u \in W^{1,q}_{loc}(\Omega_2)$ (resp. $W^{1,q}_{loc}(\Omega_2) \cap C(\Omega_2)$).

Naším cílem bude charakterizovat všechny homeomorfismy f, pro které je operátor T_f spojitý. K tomu si zavedeme následující třídu zobrazení.

Definice 1.2. Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená množina. O funkci $f \in W^{1,1}_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ řekneme, že má konečnou distorzi, pokud $J_f \in L^1_{loc}(\Omega)$ a pro skoro všechny body $x \in \Omega$ splňující $J_f(x) = 0$ platí

$$|Df(x)| = 0.$$

Pro $q \in [1, \infty)$ a f funkci s konečnou distorzí definujeme funkci K_q předpisem:

$$K_q(x) = \begin{cases} \frac{|Df(x)|^q}{|J_f(x)|} & \text{je-li } J_f(x) \neq 0, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Zdůrazněme, že po zobrazení f nepožadujeme podmínku $J_f > 0$ skoro všude.

Následující věta nám tvrdí, že homeomorfismy s konečnou distorzí zobrazují $W^{1,p}$ do $W^{1,q}$ spojitě, pokud je q-distorze vhodně integrovatelná.

Věta 1.3. *Nechť Ω_1, Ω_2 jsou otevřené podmnožiny $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p \leq q < \infty$, funkce $u \in W^{1,q}(\Omega_2)$ a nechť $f \in W^{1,1}_{loc}(\Omega_1, \Omega_2)$ je homeomorfismus s konečnou distorzí splňující podmínku*

$$K_q(x) \in L^{\frac{p}{q-p}}(\Omega_1). \tag{1.2}$$

Potom, je-li $1 \leq q \leq n$, je operátor T_f spojitý z $W^{1,q}_{loc}(\Omega_2)$ do $W^{1,p}_{loc}(\Omega_1)$, nebo je-li $n < q < \infty$, pak je spojitý z $W^{1,q}_{loc}(\Omega_2) \cap C(\Omega_2)$ do $W^{1,p}_{loc}(\Omega_1)$.

Poznamenejme, že podobné tvrzení lze nalézt v článku Ukhlova [**6**], ale důkaz tohoto tvrzení v tomto článku se dá v lepším případě označit za silně neúplný. Jedním z našich cílů je podat detailní a korektní důkaz tohoto tvrzení. Poznamenejme, že podmínka integrovatelnosti q-distorze není pouze postačující podmínkou, ale dokonce i podmínkou nutnou. Tedy každý homeomorfismus, který zobrazuje $W^{1,p}$ do $W^{1,q}$ spojitě, je již nutně zobrazení s konečnou distorzí a ta splňuje (1.2) (viz [**6**]).

Nejprve zopakujeme velmi stručný důkaz Věty 1.3 z [**6**] a vysvětlíme, v čem jsou problémy. Mějme nejdříve u hladkou, pak

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{\Omega_1} \Big|D\Big(u\big(f(x)\big)\Big)\Big|^p dx =& \int\limits_{\Omega_1} \Big|\nabla u\big(f(x)\big)\Big|^p \big|Df(x)\big|^p dx \\
\leq& \int\limits_{\Omega_1} \Big|\nabla u\big(f(x)\big)\Big|^p \big|J_f(x)\big|^{\frac{p}{q}} \big(K_q(x)\big)^{\frac{p}{q}} dx \\
\leq& \Big(\int\limits_{\Omega_1} \big|\nabla u\big(f(x)\big)\big|^q |J_f(x)| dx\Big)^{\frac{p}{q}} \Big(\int\limits_{\Omega_1} \big(K_q(x)\big)^{\frac{p}{q}\frac{q}{q-p}}\Big)^{\frac{q-p}{q}} \\
\leq& \Big(\int\limits_{\Omega_2} \big(\nabla u(y)\big)^q dy\Big)^{\frac{p}{q}} \Big(\int\limits_{\Omega_1} \big(K_q(x)\big)^{\frac{p}{q-p}}\Big)^{\frac{q-p}{q}} \\
=& \|\nabla u\|^p_{L^q(\Omega_2)} \|K_q\|^{\frac{p}{q}}_{L^{\frac{p}{q-p}}(\Omega_1)}.
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

Zbytek je podle autora [**6**] jasný a důkaz tím končí. Je jasné, že takovýto odhad musí být klíčem pro důkaz celého tvrzení, ale důkaz to bohužel není. Pokud f^{-1} nezobrazuje množiny nulové míry na množiny nulové míry, tak mohou nastat vážné problémy.

Definice 1.4. Řekneme, že zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ splňuje Luzinovu (N^{-1}) podmínku, pokud pro každou množinu $E \subset \mathbb{R}^n$ takovou, že $|E| = 0$, platí $|f^{-1}(E)| = 0$.

Pokud naše f nesplňuje (N^{-1}) podmínku (a jak dále uvidíme, to se může stát), tak složené zobrazení $u \circ f$ nemusí být ani měřitelné. Existuje-li $A \subset \Omega_1$, že $|A| > 0$ a $|f(A)| = 0$, tak můžeme u na $f(A)$ nadefinovat jakkoliv (bude se jednat o reprezentanta stejné funkce u) a složené zobrazení se na množině kladné míry A může chovat divoce. Naopak pokud f splňuje (N^{-1}) podmínku, tak z platnosti tvrzení pro jednoho reprezentanta u už snadno plyne platnost pro libovolného reprezentanta, neboť složené zobrazení měníme pouze na množině nulové míry. Jakákoliv zmínka o platnosti (N^{-1}) podmínky, nebo závislosti na zvoleném reprezentantovi v článku [**6**] bohužel chybí. Jedním z našich postupných a značně netriviálních cílů je ukázání, že pro $q \leq n$ už musí f splňující (1.2) nutně splňovat (N^{-1}) podmínku. Pro $q > n$ už (N^{-1}) podmínku obecně splňovat nemusí, ale zvolíme-li vhodného reprezentanta u (každá $W^{1,q}$, $q > n$, funkce má dokonce spojitého reprezentanta), tak tvrzení platí.

Platnost klíčového odhadu (1.3) víme pouze pro hladké u. Standardním postupem přes zhlazování bohužel není dostačující a volíme proto speciální lipschitzovskou aproximací za pomoci maximální funkce (viz Lemma 5.3). Z odhadu

(1.3) na rozdíly funkcí $u_k \circ f$ dostaneme cauchyovskost v L^q a nalezneme kandidáta na limitu derivací g. Dalším problémem, který je nutno řešit, je nalezení vhodného kandidáta na limitu posloupnosti aproximací $u_k \circ f$. Máme vhodného kandidáta $g \in L^q$ pro limitu derivací $D(u_k \circ f)$ a ještě potřebujeme dokázat, že $u \circ f$ je vhodným kandidátem pro limitu $u_k \circ f$ v L^p a $D(u \circ f) = g$. V tomto kroku opět podstatným způsobem využijeme znalosti (N^{-1}) podmínky pro $q \leq n$ a pro $q > n$ využijeme spojitosti u. Poznamenejme ještě nakonec, že v článku [**6**] klíčový předpoklad spojitosti u pro $q > n$ zcela chybí.

Z výše uvedené diskuse je zřejmé, že zkoumání platnosti Luzinovy (N^{-1}) podmínky pro zobrazení s konečnou q-distorzí je užitečné. Platnost této podmínky je zajímavým faktem sama o sobě a očekáváme, že může nalézt aplikace i jinde. Ve třetí kapitole ukážeme, že máme-li $1 \leq q \leq n$, potom za dostatečné integrovatelnosti q-distorze K_q zobrazení f je Luzinova (N^{-1}) podmínka splněna. Přesněji dokážeme větu

VĚTA 1.5. *Nechť funkce $f \in W^{1,1}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ je homeomorfismus s konečnou distorzí splňující*

$$K_q \in L^{\frac{1}{q-1}}_{loc}(\Omega),$$

kde $q \in [1, n]$. Potom f splňuje Luzinovu (N^{-1}) podmínku.

Ve čtvrté kapitole ukážeme, že tento výsledek je optimální. To jest, pokud označíme Q_0 n-dimenzionální krychli se středem v počátku a se stranami o délce 1 rovnoběžnými se souřadnicovými osami, pak platí věta:

VĚTA 1.6. *Buď $q \in (1, \infty)$ a $\delta > 0$ libovolné, potom existuje homeomorfismus $f \in W^{1,1}(Q_0, \mathbb{R}^n)$, který má konečnou distorzí, zobrazuje Q_0 na Q_0 a*

- *q-distorze $K_q \in L^\infty(Q_0)$, je-li $q > n$,*
- *nebo $K_q \in L^{\frac{1}{q-1+\delta}}(Q_0)$ pro $q \leq n$,*

a přitom f nesplňuje (N^{-1}) Luzinovu podmínku.

V páté kapitole pomocí předchozích znalostí dokážeme Větu 1.3. V následující druhé kapitole zavedeme potřebné značení a zformulujeme standardní tvrzení, která budeme dále používat.

KAPITOLA 2

Značení, definice a použité tvrzení

V celém textu pracujeme s Euklidovým prostorem $\mathbb{R}^n$ s normou

$$\|x\| = \Big(\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2\Big)^{\frac{1}{2}},$$

kde $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ a maximovou normou

$$|x| = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|.$$

Symbolem Ω máme na mysli otevřenou podmnožinu $\mathbb{R}^n$. Píšeme-li o množině E, že $E \subset\subset \Omega$, požadujeme po ni $\overline{E} \subset \Omega$.

Symbol $C(a, b, \dots)$ označuje kladnou konstantu, která závisí pouze na $a, b, \dots$, jejíž přesná hodnota se může v průběhu důkazů měnit.

Následující definice a tvrzení s důkazy jsou obsažené ve skriptech [**4**] a [**5**].

Definice 2.1. Funkce $u : M \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je lipschitzovská pokud existuje konstanta H tak, že pro všechny $x, y \in M$ platí

$$\|f(x) - f(y)\| \leq H\|x - y\|,$$

číslo H nazýváme lipschitzovskou konstantou.

Následující rozšiřovací věta je velmi známa. Platí dokonce pro $C = 1$, ale nám bohatě postačí v tomto znění.

Věta 2.2 (McShane). *Existuje konstanta $C = C(m)$ taková, že každou funkci $u : M \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ s lipschitzovskou konstantou H lze rozšířit na funkci definovanou na $\mathbb{R}^n$ s lipschitzovskou konstantou CH.*

Na $\mathbb{R}^n$ pracujeme s Lebesgueovou mírou λ_n. Je-li E měřitelná množina píšeme zkráceně $|E|$ místo $\lambda_n(E)$. Symbol χ_E značí charakteristickou funkci množiny E, to jest

$$\chi_E = \begin{cases} 1 \text{ je-li } x \in E, \\ 0 \text{ jinak.} \end{cases}$$

Pro množinu E s konečnou mírou a funkci $u \in L^1(E)$ značíme

$$u_E := \fint_E u := \frac{1}{E}\int_E u.$$

Používáme obvyklou konvenci $L^{\frac{a}{0}} = L^\infty$ pro $a \in (0, \infty)$.

Definice 2.3 (Lebesgueův bod). Řekneme, že x je Lebesgueův bod funkce f, pokud

$$\lim_{r \to 0_+} \fint_{B(x,r)} |f(x) - f(y)|dy = 0.$$

Je známo, že pro funkce z L^1_{loc} jsou skoro všechny body Lebesgueovy. Z definice lze snadno získat, že pro každý Lebesgueův bod x platí

$$\lim_{r\to 0_+} \fint_{B(x,r)} f(y)dy = f(x).$$

Definice 2.4 (Maximální operátor). Na funkcích $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ definujeme maximální operátor předpisem

$$Mf(x) = \sup_{B(x,r)\subset\subset\Omega} \fint_{B(x,r)} |f(y)|dy$$

Tento operátor je omezený z $L^p \to L^p$ pro $p \in (1,\infty)$ a platí pro něj odhad

$$|\{Mf > \lambda\}| \leq \frac{K}{\lambda} \int_{\{Mf>\lambda\}} |f|. \tag{2.1}$$

Definice 2.5. Je-li $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ a existuje-li totální diferenciál funkce f v bodě $x \in \Omega$, značíme matici parciálních derivací

$$\nabla f(x) = \Big(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\Big)_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}.$$

Symbol $C^\infty_C(\Omega)$ označuje prostor hladkých funkcí s kompaktním nosičem

$C^\infty_C(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} :$ pro každé $k, l \in \{1,\dots,k\}, j_l \in \{1,\dots n\}$ je funkce $\frac{\partial}{\partial x_{j_1}}\frac{\partial}{\partial x_{j_2}}\cdots\frac{\partial}{\partial x_{j_n}} f$ spojitá na Ω a existuje kompaktní množina $K \subset \Omega$ tak, že $f = 0$ mimo $K\}$

Definice 2.6 (Zobecněná derivace). Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Potom řekneme, že funkce $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ je slabou derivací funkce $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ podle j-té proměnné, pokud

$$\int_\Omega g(x)\phi(x)dx = -\int_\Omega f(x)\tfrac{\partial\phi}{\partial x_j}(x)dx$$

pro každou funkci $\phi \in C^\infty_c(\Omega)$. Píšeme $g = D_j f$.

Je-li $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, potom symbolem Df značíme matici slabých derivací, to jest

$$Df := \Big(D_j f_i\Big)_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}.$$

Je-li $m = n$, potom Jakobiánem $J_f(x)$ myslíme determinant matice $Df(x)$.

Definice 2.7 (Sobolevovův prostor). Sobolevovův prostor $W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^m)$ pro $p \in [1,\infty)$ definujeme

$$W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^m) = \{f \in L^p(\Omega,\mathbb{R}^n) : \text{ slabý gradient } Df \in L^p(\Omega,\mathbb{R}^{mn})\}$$

s normou $\|f\|_{W^{1,p}} = \|f\|_{1,p} = \|f\|_p + \|Df\|_p$.

Tento prostor je úplný a separabilní. Platí pro něj známá charakterizace

Věta 2.8 (Beppo Levi). *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $u \in L^1(\Omega)$ potom jsou následující výroky ekvivalentní*

(1) $f \in W^{1,p}(\Omega)$,

(2) existuje reprezentant f tak, že pro každý bázový vektor e_i a skoro všechny $x \in \mathbb{R}^n$ je funkce

$$t \mapsto f(x + te_i) \text{ absolutně spojitá na } \{t : x + te_i \in \Omega\}$$

a pro funkce $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ počítané jako klasické parciální derivace platí

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^p(\Omega).$$

Navíc je-li $f \in W^{1,p}(\Omega)$ vhodný reprezentant ve smyslu (2)*, pak pro skoro všechny $x \in \Omega$ platí*

$$D_j f = \frac{\partial f}{\partial x_j}.$$

Definice 2.9 (Aproximativní diferenciál). Nechť je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ měřitelná funkce, pak řekneme, že f má v bodě x_0 aproximativní diferenciál $A_f(x_0)$, pokud pro každé $\varepsilon > 0$ je

$$\lim_{r\to 0_+} \frac{|B(x_0, r) \cap E_\varepsilon|}{|B(x_0, r)|} = 0,$$

kde $E_\varepsilon := \big\{x \in \mathbb{R}^n : \big\|f(x_0) - f(x) - \big(A_f(x_0)\big)\big(x - x_0\big)\big\| \geq \varepsilon\|x_0 - x\|\big\}$.

Má-li funkce f totální diferenciál ∇f, pak zřejmě ∇f je i aproximativní diferenciál f.

Lemma 2.10. *Nechť x_0 je bod hustoty $\{f = g\}$, $f(x_0) = g(x_0)$ a funkce f má aproximativní diferenciál v x_0, potom i funkce g má aproximativní diferenciál v x_0 a diferenciály se rovnají.*

Důkaz. Označme E^g_ε množinu E_ε příslušející funkci g a E^f_ε příslušející f. Potom máme

$$E^g_\varepsilon = \big(E^g_\varepsilon \cap \{f = g\}\big) \cup \big(E^g_\varepsilon \cap \{f \neq g\}\big) \subset E^f_\varepsilon \cup \{f \neq g\}.$$

Z definic již snadno spočítáme

$$0 \leq \lim_{r\to 0_+} \frac{|B(x_0, r) \cap E^g_\varepsilon|}{|B(x_0, r)|} \leq \lim_{r\to 0_+} \frac{|B(x_0, r) \cap E^f_\varepsilon|}{|B(x_0, r)|} + \lim_{r\to 0_+} \frac{|B(x_0, r) \cap \{f \neq g\}|}{|B(x_0, r)|} = 0.$$

□

Je známo, že je-li $f \in W^{1,1}_{loc}$, potom má skoro všude aproximativní diferenciál a tento aproximativní diferenciál splňuje

$$A_f = Df \text{ skoro všude.}$$

Věta 2.11 (Poincarého nerovnost). *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a funkce u náleží do $W^{1,1}(\Omega)$, potom pro každou kouli $B = B(x, r) \subset\subset \Omega$ platí*

$$\int_B |u(y) - u_B| dy \leq Cr \int_B |\nabla u(y)| dy,$$

kde konstanta C závisí pouze na dimenzi.

Věta 2.12 (O vnoření $p < n$). *Nechť B je otevřená koule v $\mathbb{R}^n$, funkce u náleží do $L^1(B)$ a slabý gradient Du patří do $L^p(B)$, kde $p \in [1, n)$, potom $u \in L^{\frac{np}{n-p}}(B)$. a platí odhad*

$$\|u\|_{L^{\frac{np}{n-p}}} \leq C\big(\|u\|_{L^1(B)} + \|Du\|_{L^p(B)}\big),$$

kde konstanta C závisí pouze na dimenzi.

VĚTA 2.13 (O vnoření $p > n$). *Nechť B je otevřená koule v $\mathbb{R}^n$, funkce u náleží do $L^1(B)$ a slabý gradient Du patří do $L^p(B)$, kde $p \in (n, \infty)$, potom existuje konstanta $C(n)$ a funkce $\tilde{u} = u$ skoro všude taková, že $\tilde{u}$ je $\alpha = 1 - \frac{p}{n}$ Hölderovská. To jest*

$$|\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y)| \leq C\|x - y\|^{\alpha}.$$

a platí odhad

$$\sup_{x \in B} |\tilde{u}(x)| + \sup_{x,y \in B, x \neq y} \frac{|\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y)|}{\|x - y\|^{\alpha}} \leq C\big(\|u\|_{L^1(B)} + \|Du\|_{L^p(B)}\big).$$

VĚTA 2.14 (Vitali). *Nechť E je podmnožina $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{V}$ je systém otevřených koulí v $\mathbb{R}^n$ takový, že pro každé $x \in E$ je*

$$\inf\{r > 0: \text{ existuje } z \in \mathbb{R}^n \text{ tak, že } x \in B(z, r) \in \mathbb{V}\} = 0.$$

Potom existuje spočetný podsystém $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$ po dvou disjunktních koulí splňující

$$\big|E \setminus \bigcup_{B \in \mathbb{W}} B\big| = 0.$$

Následující věta o substituci je přejata z [**1**].

VĚTA 2.15. *Nechť Ω_1, Ω_2 jsou otevřené podmnožiny $\mathbb{R}^n$, $u : \Omega_2 \to [0, \infty)$ je borelovská funkce a nechť $f \in W^{1,1}_{loc}(\Omega_1, \Omega_2)$ je homeomorfismus potom*

$$\int_{f^{-1}(E)} u \circ f(x)|J_f(x)|dx \leq \int_E u(y)dy,$$

pro každou borelovskou množinu $E \subset \Omega_2$.

KAPITOLA 3

Integrovatelnost K_q distorze a (N^{-1}) Luzinova podmínka

V této kapitole ukážeme, že pokud je f homeomorfismus s konečnou distorzí, potom za dodatečného kritéria na integrovatelnost K_q distorze splňuje zobrazení f Luzinovu (N^{-1}) podmínku. Důkaz je inspirován [**3**], kde je dokázán případ pro $q = n$.

Pro další práci budeme potřebovat Větu o derivaci složení lipschitzovské funkce a zobrazení ze Sobolevova prostoru. Platí za obecnější předpokladů, nám však postačí takto.

Lemma 3.1. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $p \in [1, \infty)$. Nechť dále $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je lipschitzovská funkce a $f \in W^{1,p}(\Omega, R^n)$ má konečnou distorzi a $u \circ f \in L^p$. Potom $u \circ f$ náleží $W^{1,p}(\Omega)$ a pro skoro všechny $x \in \Omega$ platí*

$$D(u \circ f)(x) = \nabla u\big(f(x)\big) \cdot Df(x),$$

kde dodefinujeme $\nabla u\big(f(x)\big) \cdot Df(x) := 0$ pokud $\nabla u\big(f(x)\big)$ neexistuje a zároveň $|Df(x)| = 0$.

Důkaz. Změníme-li f na množině nulové míry, potom změníme i $u \circ f$ na množině nulové míry. Proto podle Věty 2.8 můžeme předpokládat, že zobrazení $f_1, \dots, f_n$ jsou absolutně spojité na skoro všech úsečkách λ rovnoběžných se souřadnicovými osami a pro skoro všechny $x \in \Omega$ platí $D_j f_i(x) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$. Ukážeme, že na těchto přímkách je absolutně spojitá i funkce $u \circ f$. Buď $\lambda = \{x + te_i, \text{kde } t \text{ splňují } x + te_i \in \Omega\}$ taková přímka rovnoběžná s i-tou souřadnicovou osou. Zvolme $\varepsilon > 0$ najděme $\delta > 0$ takové, že pro každou volbu $t_1 \leq s_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k \leq s_t$, splňující $\overline{x + te_i, x + se_i} \subset \Omega$ a

$$\sum_{j=1}^{k} |s_j - t_j| < \delta \text{ platí } \sum_{j=1}^{k} |f_l(x + se_i) - f_l(x + te_i)| < \varepsilon,$$

pro každé $l \in \{1, \dots, n\}$. Potom

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{k} |u \circ f(x + se_i) - u \circ f(x+te_i)| &\leq C \sum_{j=1}^{k} \|f(x + se_i) - f(x + te_i)\| \\ &\leq C \sum_{j=1}^{k} \max_{l \in \{1,\dots,n\}} |f_l(x + se_i) - f_l(x + te_i)| < C\varepsilon, \end{aligned}$$

kde C je lipschitzovská konstanta u. Tedy i $u \circ f$ je na skoro všech přímkách rovnoběžnými se souřadnnicovými osami absolutně spojitá funkce.

Proto pro skoro všechny body x v Ω existují parciální derivace $\frac{\partial u \circ f}{\partial x_i}(x)$. Z věty o derivaci složené funkce plyne

$$\frac{\partial u \circ f}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j}\big(f(x)\big)\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x), \tag{3.1}$$

kdykoliv existuje totální diferenciál $\nabla u\big(f(x)\big)$ a parciální derivace $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$. Jsou-li $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) = 0$ pro každé $j \in \{1, \dots, n\}$ potom $\frac{\partial u \circ f}{\partial x_i}(x) = 0$, protože

$$\begin{aligned}\frac{\big|u\big(f(x+he_i)\big) - u\big(f(x)\big)\big|}{h} &\leq C\frac{\|f(x+he_i) - f(x)\|}{h} \\ &\leq C \max_{j\in\{1,\dots,n\}} \frac{|f_j(x+he_i) - f_j(x)|}{h} \overset{h\to 0+}{\to} 0.\end{aligned}$$

To nás nás ospravedlňuje k dodefinování ze znění věty a i v tomto případě vztah (3.1) platí.

Nyní ukážeme, že množina, kde neexistuje $\nabla u(f(x))$, existují parciální derivace $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$ a $\frac{\partial f_{j_0}}{\partial x_{i_0}}(x) \neq 0$ pro nějaké i_0, j_0 je nulové míry v Ω. Je-li

$$\begin{aligned}P := \Big\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) \text{ existuje pro každé } i, j \in \{1, \dots, n\} \\ \text{a existují } i_0, j_0 \in \{1, \dots, n\} \text{ tak, že } \frac{\partial f_{i_0}}{\partial x_{j_0}}(x) \neq 0\Big\}.\end{aligned}$$

Potom je P měřitelná množina a pro skoro všechny body $x \in P$ je $J_f(x) \neq 0$, neboť f má konečnou distorzi a $Df(x) \neq 0$. Je-li

$$M := \{x \in \mathbb{R}^n : \text{neexistuje } \nabla u(x)\},$$

a $\tilde{M}$ borelovská množina splňující $|\tilde{M}| = |M| = 0$ a $M \subset \tilde{M}$, pak z Věty 2.15 o substituci spočítáme

$$\int_{f^{-1}(\tilde{M})\cap P} |J_f| \leq \int_{f^{-1}(\tilde{M})} |J_f| \leq |\tilde{M}| = 0.$$

Jelikož je $|J_f| > 0$ skoro všude na P je nutně $|f^{-1}(M) \cap P| = 0$. Tedy množinu Ω lze rozdělit na množiny

$$\begin{aligned}\Omega = \{x : \text{pro nějaké } i, j \text{ neexistuje } \tfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\} \cup \big(f^{-1}(M) \cap P\big) \\ \cup \{x : \text{ existují } \tfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \text{ a jsou rovny nule}\} \cup \{x : \text{ existují } \nabla u\big(f(x)\big) \text{ a } \tfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\}.\end{aligned}$$

První dvě množiny jsou nulové míry, proto poslední dvě množiny obsahují skoro všechny $x \in \Omega$ a tedy zřejmě platí vztah (3.1) skoro všude v Ω. Zbývá ukázat, že $u \circ f \in W^{1,p}$. Víme, že složení $u \circ f$ leží v L^p a $u \circ f$ je absolutně spojitá funkce na skoro všech přímkách rovnoběžnými s osami. Abychom mohli použít Větu 2.8, zbývá ukázat, že $\frac{\partial u \circ f}{\partial x_i}(x) \in L^p(\Omega)$. Z odhadu (3.1) pro skoro všechny $x \in \Omega$ dostáváme

$$\Big|\frac{\partial(u \circ f)}{\partial x_i}(x)\Big| = \Big|\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j}\big(f(x)\big)\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)\Big| \leq \sum_{j=1}^{n} C\Big|\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)\Big| \leq \tilde{C}|Df(x)|,$$

kde C je lipschitzovská konstanta u. Je-li funkce na levé straně měřitelná, potom umocněním nerovnosti na p a zintegrováním přes Ω získáme požadovaný odhad.

Víme, že množina, kde neexistuje $\nabla u\big(f(x)\big)$ a $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) \neq 0$ je nulové míry v Ω. Proto, dodefinujeme-li $\nabla u(x)$ mimo definiční obor libovolným způsobem, stále bude platit vztah (3.1). Zvolíme-li rozšíření

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = \limsup_{j\to\infty} \frac{u\big(x + (1/j)e_i\big) - u(x)}{1/j} \tag{3.2}$$

budou složky ∇u borelovské funkce, a tedy složení $\frac{\partial u}{\partial x_j} \circ f$ měřitelné a tedy i celá funkce měřitelná.

$\square$

POZNÁMKA 3.2. *Důkaz věty 3.1 nám říká, že nezáleží jak si dodefinujeme totální diferencál ∇u mimo definiční obor. Optimální rozšíření je dle vzorečku* (3.2)*, kdy rozšíříme ∇u na všude definovanou borelovskou funkci.*

LEMMA 3.3. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ je prostá měřitelná funkce, která má v x_0 aproximativní diferenciál A. Potom existují konstanty $\tau(n)$, $D(A)$ a poloměr $r_0 > 0$ takové, že pro každé $0 < r < r_0$ existuje $y \in \mathbb{R}^n$ a $R \leq Dr$ splňující*

$$\frac{\Big|B(x_0,r) \cap f^{-1}\Big(B\big(y,2R\big)\Big)\Big|}{|B(x_0,r)|} \geq \tau,$$

$$\frac{\Big|B(x_0,r) \cap f^{-1}\Big(\mathbb{R}^n \setminus B\big(y,3R\big)\Big)\Big|}{|B(x_0,r)|} \geq \tau.$$

DŮKAZ. Existuje konstanta K závislá pouze na dimenzi n taková, že každá koule s poloměrem $3r$ může být pokryta K koulemi o poloměru r. Položme

$$\alpha = \frac{1}{K+1}.$$

Z definice aproximativního diferenciálu nalezneme pro $\delta = \frac{\alpha}{2}$ a $\varepsilon = 1$ poloměr r_0 takový, že pro všechny $0 < r < r_0$ platí

$$B(x_0,r_0) \subset \Omega \text{ a } \frac{|B(x_0,r) \cap E_\varepsilon|}{|B(x_0,r)|} \leq \delta,$$

kde

$$E_\varepsilon = \{x : \|f(x) - f(x_0) - A(x-x_0)\| \geq \varepsilon\|x - x_0\|\}.$$

Definujme pro Q borelovské množiny předpisem

$$\mu(Q) = \frac{\big|\big(B(x_0,r) \cap f^{-1}(Q)\big) \setminus E_\varepsilon\big|}{|B(x_0,r)|}$$

borelovskou míru. Jelikož je f prostá je zřejmě μ neatomická míra a platí

$$1 \geq \mu(\mathbb{R}^n) \geq \frac{\big|B(x_0,r)\big| - \big|B(x_0,r) \cap E_\varepsilon\big|}{|B(x_0,r)|} \geq 1 - \delta \geq 1 - \frac{\alpha}{2}. \tag{3.3}$$

Buď

$$\rho := \inf\{r > 0 : \text{ existuje } y \in \mathbb{R}^n \text{ takové, že } \mu\big(B(y,r)\big) \geq \alpha\}.$$

Protože je míra μ neatomická, nutně plyne $\rho > 0$.

Definujme

$$L := \sup_{\|h\| \leq 1} \|Ah\|.$$

Ukážeme, že

$$f^{-1}\Big(B\big(f(x_0),(L+1)r\big)\Big) \text{ obsahuje } B(x_0,r) \setminus E_\varepsilon. \tag{3.4}$$

Je-li totiž $x \notin E_\varepsilon$, trojúhelníkovou nerovností dostaneme

$$\big|\|f(x) - f(x_0)\| - \|A(x-x_0)\|\big| \leq \|f(x) - f(x_0) - A(x-x_0)\| < \varepsilon\|x - x_0\|.$$

Pokud navíc $x \in B(x_0, r)$, obdržíme

$$\|f(x) - f(x_0)\| < \|A(x - x_0)\| + \varepsilon\|x - x_0\| \leq (L+1)r.$$

Jelikož ze vztahů (3.4) a (3.3) platí

$$\mu\Big(B\big(f(x_0), (L+1)r\big)\Big) = \mu(\mathbb{R}^n) \geq 1 - \frac{\alpha}{2} > \alpha,$$

plyne nutně z definice ρ

$$\rho \leq (L+1)r.$$

Z definice infima nalezneme bod y a poloměr $R > 0$ takový, že

$$\mu\big(B(y, 2R)\big) \geq \alpha \text{ a } R < \rho \leq 2R. \tag{3.5}$$

Potom máme

$$R \leq \rho \leq (L+1)r. \tag{3.6}$$

Mějme sbírku koulí $B_1, \dots, B_K$ s poloměrem R, jež pokrývají $B(y, 3R)$. Jelikož je $R \leq \rho$, máme

$$\mu(B_i) \leq \alpha \text{ pro } i = 1, \dots, K,$$

a proto nutně

$$\mu\big(B(y, 3R)\big) \leq \sum_{i=1}^{K} \mu(B_i) \leq K\alpha.$$

Což ovšem díky odhadu (3.3) znamená, že

$$\mu\big(\mathbb{R}^n \setminus B(y, 3R)\big) \geq \mu(\mathbb{R}^n) - \mu\big(B(y, 3R)\big) \geq 1 - K\alpha - \delta = \frac{\alpha}{2}, \tag{3.7}$$

jelikož $\mu(\mathbb{R}^n) \geq 1 - \delta$ a $1 - K\alpha = \alpha$. K dokončení důkazu už jen stačí položit $\tau = \frac{\alpha}{2}$ a zkontrolovat, že náš bod y a poloměr R vyhovují tvrzení díky odhadům (3.6), (3.5) a (3.7).

□

Důkaz Věty 1.5. Pro u hladké funkce a měřitelné množiny $E \subset \Omega$ získáme podobně jako v klíčovém odhadu (1.3) nerovnost

$$\int_E |D(u \circ f)| dx \leq \|\nabla u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \|K_q\|^{\frac{1}{q}}_{L^{\frac{1}{q-1}}(E)}. \tag{3.8}$$

Nejdříve ukážeme, že $|J_f| > 0$ skoro všude. Označme si

$$Z := \{x \in \Omega : J_f(x) = 0\}$$

. Buď x_0 bod, kde existuje aproximativní diferenciál f.

Užitím Lemmatu 3.3 nalezneme poloměr $r_0 > 0$ a $D \in \mathbb{R}$ tak, že pro každé $0 < r < r_0$ existuje poloměr $0 < R \leq Dr$ splňující

$$\frac{\Big|B(x_0, r) \cap f^{-1}\Big(B\big(y, 2R\big)\Big)\Big|}{|B(x_0, r)|} \geq \tau,$$

$$\frac{\Big|B(x_0, r) \cap f^{-1}\Big(\mathbb{R}^n \setminus B\big(y, 3R\big)\Big)\Big|}{|B(x_0, r)|} \geq \tau.$$

Buď funkce $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ s vlastnostmi

$$\operatorname{spt} u \subset B(y,3R), u = 1 \text{ na } B(y,2R) \text{ a } \int_{\mathbb{R}^n} |Du|^n dy \le C,$$

kde C závisí pouze na dimenzi n (nikoliv na R). Položme

$$v = u \circ f.$$

Potom z Lemmatu 3.1 funkce v patří do $W^{1,1}\big(B(x_0,R)\big)$ a získáváme

$$\frac{\big|B(x_0,r) \cap \{v=1\}\big|}{|B(x_0,r)|} \ge \frac{\big|B(x_0,r) \cap f^{-1}\big(B(y,2R)\big)\big|}{|B(x_0,r)|} \ge \tau \tag{3.9}$$

$$\frac{\big|B(x_0,r) \cap \{v=0\}\big|}{|B(x_0,r)|} \ge \frac{\big|B(x_0,r) \setminus f^{-1}\big(B(y,3R)\big)\big|}{|B(x_0,r)|} \ge \tau.$$

Je-li $c \le \frac{1}{2}$, potom

$$\int_B |v-c|dx \ge \int_{B\cap\{v\ge 1\}} (v-c)dx \ge \frac{1}{2}|B \cap \{v \ge 1\}|,$$

naopak je-li $c \ge \frac{1}{2}$, potom

$$\int_B |v-c|dx \ge \int_{B\cap\{v\le 0\}} (c-v)dx \ge \frac{1}{2}|B \cap \{v \le 0\}|.$$

Celkově máme

$$\frac{1}{2}\min\big\{|B\cap\{v\le 0\}|, |B\cap\{v\ge 1\}|\big\} \le \inf_{c\in\mathbb{R}} \int_B |v-c|dx. \tag{3.10}$$

Užitím odhadů (3.9), (3.10) a Poincarého nerovnosti máme

$$1 \le C(n)|B(x_0,r)|^{-1} \inf_{c\in\mathbb{R}} \int_{B(x_0,r)} |v-c|dx \le C(n)r^{1-n} \int_{B(x_0,r)} |Dv|dx$$
$$= C(n)r^{1-n} \int_{B(x_0,r)} |D(u\circ f)|dx.$$

Jelikož f má konečnou distorzi, je nutně $Df = 0$ skoro všude na Z, a proto i $D(u\circ f) = \big((\nabla u)\circ f\big)(x)\cdot Df(x) = 0$ skoro všude na Z. Proto můžeme množinu Z při integrování funkce $D(u \circ f)$ zanedbat.

Užitím odhadu (3.8), Hölderovy nerovnosti a vlastnosti $R \leq Dr$ získáváme

$$\begin{aligned}
1 &\leq C(n)r^{1-n} \int_{B(x_0,r)\setminus Z} |D(u \circ f)|dx \\
&\leq C(n)r^{1-n} \|\nabla u\|_{L^q\left(B(y,3R)\right)} \|K_q\|^{\frac{1}{q}}_{L^{\frac{1}{q-1}}\left(B(x_0,r)\setminus Z\right)} \\
&\leq C(n)r^{1-n} \|\nabla u\|_{L^n\left(B(y,3R)\right)} |B(y,3R)|^{\frac{n-q}{nq}} \left(r^n r^{-n} \int_{B(x_0,r)\setminus Z} \left(K_q(x)\right)^{\frac{1}{q-1}} \right)^{\frac{q-1}{q}} \\
&\leq C(n) \left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{n}{q}-1} \left(\fint_{B(x_0,r)} \left(K_q(x)\right)^{\frac{1}{q-1}} \chi_{\Omega\setminus Z} \right)^{\frac{q-1}{q}} \\
&\leq C(n) D^{\frac{n}{q}-1} \left(\fint_{B(x_0,r)} \left(K_q(x)\right)^{\frac{1}{q-1}} \chi_{\Omega\setminus Z} \right)^{\frac{q-1}{q}}.
\end{aligned}$$

Je-li x_0 Lebesgueův bod funkce $g := K_q^{\frac{1}{q-1}} \chi_{\Omega\setminus Z}$, potom limitním přechodem $r \to 0_+$ získáme

$$1 \leq C\left(K_q(x_0)\right)^{\frac{1}{q-1}} \chi_{\Omega\setminus Z}(x_0).$$

Tedy $x_0 \notin Z$. To znamená, že množina Z neobsahuje žádný bod, který je Lebesgueovým bodem funkce g a kde existuje aproximativní diferenciál f. Proto skoro všechny body leží mimo Z, a proto musí být Z množina míry nula. Právě jsme dokázali, že $|J_f| > 0$ skoro všude.

Nyní dokončíme důkaz. Pro danou množinu $E \subset \Omega$ splňující $|f(E)| = 0$ nalezneme borelovsky měřitelnou množinu $A \subset \mathbb{R}^n$ míry nula, která obsahuje množinu $f(E)$. Potom je E obsažená v měřitelné množině $\tilde{E} = f^{-1}(A)$. Užitím Věty 2.15 o substituci získáváme

$$\int_{\tilde{E}} |J_f(x)|dx = \int_{\Omega} \chi_A\big(f(x)\big)|J_f(x)|dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A(y)dy = 0.$$

Jelikož je $|J_f| > 0$ skoro všude, nutně získáváme, že $|E| = 0$.

□

KAPITOLA 4

Selhání Luzinovy (N^{-1}) podmínky

V této kapitole ukážeme, že výsledek dosažený ve Větě 1.5 je optimální. Zkonstruujeme homeomorfismy, které těsně nebudou splňovat dostatečnou podmínku integrovatelnosti K_q, a nebudou splňovat (N^{-1}) podmínku. Ke konstrukci příkladu, kdy selže (N^{-1}) Luzinova podmínka, budeme muset nejdříve vybudovat speciální množinu typu Cantorova diskontinua. Naše funkce bude potom zobrazovat diskontinuum kladné míry na diskontinuum nulové míry. Konstrukce je inspirována [**2**].

Připomeňme značení, je-li $x \in \mathbb{R}^n$, pak $\|x\|$ značí eukleidovskou normu a $|x|$ značí maximovou normu. Pro naše potřeby si pro $y \in \mathbb{R}^n$ a $r > 0$ definujme předpisem

$$Q(x_0, r) = \{x : |x - x_0| \leq r\}$$

n-dimenzionální krychli se středem x_0 a stranami o délce $2r$ rovnoběžnými s osami.

Konstrukce 4.1 (Cantorovo diskontinuum). *Mějme a_k posloupnost kladných čísel takových, že $a_0 = 1$ a $0 < a_{k+1} < a_k$. Vyjdeme z krychle $Q_0 = Q(0, \frac{1}{2})$. Buď V množina vrcholů krychle Q_0. Potom množinu $V^k = V \times \cdots \times V$ budeme používat k indexovaní v naší konstrukci.*

V prvním kroku krychli Q_0 rozdělíme na 2^n krychlí

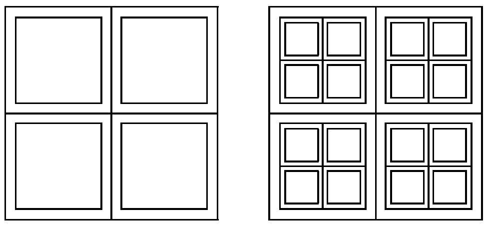
$$P_v = Q(z_v, a_0/4), \text{ kde } z_v = z_0 + \tfrac{a_0}{2} v \text{ a } v \in V$$

a položíme $Q_v = Q(z_v, a_1/4)$.

V k-tém kroku máme na počátku $2^{n(k-1)}$ krychlí Q_w, kde $w \in V^{k-1}$. Každou krychli Q_w rozdělíme na 2^n krychlí

$$P_{w,v} = Q(z_{w,v}, a_{k-1}/2^{k+1}), \text{ kde } z_{w,v} = z_w + \tfrac{a_{k-1}}{2^k} v \text{ a } v \in V$$

a položíme $Q_{w,v} = Q(z_{w,v}, a_k/2^{k+1})$.



Obr. 1. *Krychle Q_v a P_v pro $v \in V^1$ a $v \in V^2$.*

Naše hledané diskontinuum potom bude

$$D = \bigcap_{k=0}^{\infty} \bigcup_{v \in V^k} Q_v.$$

Jeho míru můžeme snadno spočítat

$$|D| = \Big|\bigcap_{k=0}^{\infty} \bigcup_{v\in V^k} Q_v\Big| = \lim_{k\to\infty} \Big|\bigcup_{v\in V^k} Q_v\Big| = \lim_{k\to\infty} 2^{nk}\Big(\frac{a_k}{2^k}\Big)^n = \big(\lim_{k\to\infty} a_k\big)^n. \tag{4.1}$$

Následující lemma lze snadno ověřit elementárním výpočtem, proto důkaz vynecháme.

LEMMA 4.2. *Buď $\rho : (0,\infty) \to (0,\infty)$ ostře monotónní diferencovatelná funkce. Potom pro zobrazení*

$$f(x) = \frac{x}{|x|}\rho(|x|), x \neq 0$$

platí skoro všude

$$|Df(x)| \approx c(n) \max\Big\{\frac{\rho(|x|)}{|x|}, |\rho'(x)|\Big\} \ a$$

$$J_f(x) \approx c(n) \frac{\rho'(|x|)\big(\rho(x)\big)^{n-1}}{|x|^{n-1}}.$$

Nyní můžeme přejít k samotné konstrukci zobrazení.

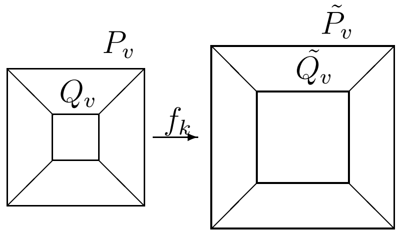
DŮKAZ VĚTY 1.6. Nejdříve zkonstruujeme zobrazení mezi libovolnými dvěma Cantorovými diskontinui $D, \tilde{D}$ příslušejících posloupnostem a_k, b_k takových, že vyhovují podmínkám konstrukce Cantorova diskontinua a

$$\lim_{k\to\infty} a_k > 0 \text{ a } \lim_{k\to\infty} b_k = 0. \tag{4.2}$$

Poté nalezneme hodnoty a_k, b_k tak, aby zobrazení splňovalo tvrzení.

Buď Q_v, P_v, krychle a z_v body příslušející konstrukci diskontinua D a $\tilde{Q}_v, \tilde{P}_v$, krychle a $\tilde{z}_v$ příslušející $\tilde{D}$.

Naše zobrazení f bude definováno jako limita bilipschitzovských homeomorfismů $f_k : Q_0 \to Q_0$, kde f_k zobrazí Q_v na $\tilde{Q}_v$ pro každé $v \in V^k$. Potom f zobrazí první diskontinuum D na druhé diskontinuum $\tilde{D}$.



Obr. 2. Zobrazení $P_v \setminus Q_v$ na $\tilde{P}_v \setminus \tilde{Q}_v$ pro $v \in V^k$

Započněme konstrukci. Definujme $f_0(x) = x$. Zobrazení f_1 zvolíme tak, aby stejnolehle zobrazilo krychli Q_v na krychli $\tilde{Q}_v$ a mezikrychlí $P_v \setminus Q_v$ na mezikrychlí $\tilde{P}_v \setminus \tilde{Q}_v$ pro každé $v \in V$. Obecně v k-tém kroku vyjdeme ze zobrazení f_{k-1} a změníme jeho hodnoty na P_v pro každé $v \in V^k$ tak, aby stejnolehle zobrazovalo krychli Q_v na krychli $\tilde{Q}_v$ a $P_v \setminus Q_v$ na $\tilde{P}_v \setminus \tilde{Q}_v$ pro každé $v \in V^k$.

Tedy naše zobrazení f_k pro $k \geq 1$ můžeme vyjádřit vzorečkem

$$f_k(x) = \begin{cases} f_{k-1}(x) & \text{je-li } x \notin \bigcup_{v\in V^k} P_v, \\ f_{k-1}(z_v) + \frac{b_k}{a_k}(z - z_v) & \text{je-li } x \in Q_v, \\ f_{k-1}(z_v) + A_k(z - z_v) + B_k \frac{(z-z_v)}{|z-z_v|} & \text{je-li } x \in P_v \setminus Q_v. \end{cases}$$

kde

$$A_k = \frac{b_{k-1} - b_k}{a_{k-1} - a_k} \text{ a } B_k = 2^{-k-1}(b_k - Aa_k). \tag{4.3}$$

Položme

$$f(x) := \lim_{k\to\infty} f_k(x).$$

Ukážeme, že posloupnost f_k je cauchyovská v $C(Q_0, \mathbb{R}^n)$ a tedy f je spojitá funkce. Je-li $l > k$, potom platí rovnost

$$f_l(x) = f_k(x) \text{ pro každé } x \in \bigcup_{j=0}^{k} \bigcup_{v\in V^j} P_v \setminus Q_v = Q_0 \setminus \bigcup_{v\in V^k} Q_v.$$

Proto můžeme odhadovat

$$\|f_k - f_l\|_{C(Q_0)} = \max_{v\in V^k} \sup_{x\in Q_v} |f_k(x) - f_l(x)| \leq \max_{v\in V^k} \sup_{y,z\in \tilde{Q}_v} |z-y| \leq 2^{-k} b_k \overset{k\to\infty}{\to} 0. \tag{4.4}$$

Dále zjistíme, že zobrazení f je prosté a zobrazuje D na $\tilde{D}$. Zřejmě f zobrazuje $P_v \setminus Q_v$ prostě na $\tilde{P}_v \setminus \tilde{Q}_v$ (, jelikož se tam chová jako f_k). Je-li $x \in \tilde{D}$ potom existuje posloupnost vrcholů $(v_i)_{i=1}^{\infty}$, $v_i \in V$, taková, že $x \in \tilde{Q}_{(v_1,\dots,v_k)}$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. Potom

$$f^{-1}(x) = f^{-1}\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} \tilde{Q}_{(v_1,\dots,v_k)}\Big) \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} f^{-1}(\tilde{Q}_{(v_1,\dots,v_k)}) = \bigcap_{k=1}^{\infty} Q_{(v_1,\dots,v_k)} \subset D.$$

Jelikož je $Q_{(v_1,\dots,v_k)}$ posloupnost do sebe zanořených množin s klesajícím diametrem je z Cantorova principu $\bigcap_{k=1}^{\infty} \tilde{Q}_{(v_1,\dots,v_k)}$ jednobodová podmnožina diskontinua D. Proto je f prosté zobrazení a zobrazuje jedno diskontinuum na druhé. Jelikož je f prosté spojité zobrazení na kompaktní množině Q_0, je to homeomorfismus.

Dle Lemmatu 4.2 víme, jak se chová derivace f_k (a tedy i f) na $P_v \setminus Q_v$ pro $v \in V^k$. Na Q_v derivaci snadno spočítáme z definice f_k. Tedy

$$\begin{array}{ll} \nabla f_k = \nabla f_{k-1} & \text{pro skoro všechny } x \notin \bigcup_{v\in V^K} P_v, \\ \nabla f_k = \frac{b_k}{a_k} & \text{je-li } x \in Q_v, \\ \nabla f_k \approx \max\{A_k, A_k + \frac{B_k}{|x-z_v|}\} & \text{pro skoro všechny } x \in P_v \setminus Q_v. \end{array} \tag{4.5}$$

Nyní ukážeme, že f_k je cauchyovská posloupnost ve $W^{1,1}(Q_0)$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Buď $k < l$, potom

$$\|f_k - f_l\|_{W^{1,1}(Q_0)} \leq \|f_k - f_l\|_{L^\infty(Q_0)} |Q_0| + \|\nabla f_k - \nabla f_l\|_{L^1(Q_0)}. \tag{4.6}$$

Díky odhadu (4.4) je posloupnost $f_k - f_l$ cauchyovská ve $C(Q_0)$, proto nalezneme k_1 takové, že

$$\|f_k - f_l\|_{L^\infty(Q_0)} \leq |Q_0|^{-1} \frac{\varepsilon}{4}. \tag{4.7}$$

K odhadu druhé části využijeme, že $\nabla f_k = \nabla f_l$ na $Q_0 \setminus \bigcup_{v\in V^k} Q_v$, tedy

(4.8)

$$\begin{aligned}
\|\nabla f_k - \nabla f_l\|_{L^1(Q_0)} &\leq \|\nabla f_k\|_{L^1(\bigcup_{v\in V^k} Q_v)} + \|\nabla f_l\|_{L^1(\bigcup_{v\in V^l} Q_v)} \\
&= \int\limits_{\bigcup_{v\in V^k} Q_v} |\nabla f_k| + \|\nabla f_l\|_{L^1(\bigcup_{v\in V^k} Q_v)} + \sum_{i=k+1}^{l} \|\nabla f_l\|_{L^1(\bigcup_{v\in V^i} P_v\setminus Q_v)} \\
&\leq \Big|\bigcup_{v\in V^k} Q_v\Big|\frac{b_k}{a_k} + \Big|\bigcup_{v\in V^l} Q_v\Big|\frac{b_l}{a_l} + \sum_{i=k+1}^{l}\sum_{v\in V^i} \|\nabla f_l\|_{L^1(P_v\setminus Q_v)} \\
&\leq \frac{b_k}{a_k} + \frac{b_l}{a_l} + \sum_{i=k+1}^{l}\sum_{v\in V^i} \|\nabla f_l\|_{L^1(P_v\setminus Q_v)}.
\end{aligned}$$

Jelikož ze vztahu (4.2) výraz b_k/a_k konverguje pro k jdoucí k nekonečnu do nuly, najdeme $k_2 \geq k_1$ takové, že

$$\frac{b_j}{a_j} \leq \frac{\varepsilon}{4} \text{ pro každé } j \geq k_2. \tag{4.9}$$

Za použití vzorečku (4.5) a (4.3) si odhadněme chování ∇f_l na $P_v \setminus Q_v$ pro $v \in V^i$. Je-li totiž $x \in P_v \setminus Q_v$, potom platí $|x - z_v| > 2^{-i-1}a_i$ a tedy

$$\begin{aligned}
\nabla f_l(x) = \nabla f_i(x) &\approx \max\{A_i, A_i + \frac{B_i}{|x-z_v|}\} \leq A_i + \frac{|B_i|}{|x-z_v|} \\
&\leq A_i + \frac{|2^{-i-1}b_i - A_i 2^{-i-1}a_i|}{2^{-i-1}a_i} \leq 2A_i + \frac{b_i}{a_i},
\end{aligned}$$

skoro všude. Budeme ještě potřebovat odhadnout míru množiny $\bigcup_{v\in V^i} P_v \setminus Q_v$

(4.10)

$$\Big|\bigcup_{v\in V^i} P_v\setminus Q_v\Big| = 2^{ni}\bigg(\Big(\frac{a_{i-1}}{2^i}\Big)^n - \Big(\frac{a_i}{2^i}\Big)^n\bigg) = \big(a_{i-1}-a_i\big)\Big(\sum_{j=0}^{n-1} a_{i-1}^j a_i^{n-1-j}\Big) \leq n(a_{i-1}-a_i),$$

kde jsme využili, že $a_i \leq 1$. Nyní přistoupíme k odhadu

(4.11)

$$\begin{aligned}
\sum_{i=k+1}^{l}\sum_{v\in V^i} \|\nabla f_l\|_{L^1(P_v\setminus Q_v)} &\leq \sum_{i=k+1}^{l}\sum_{v\in V^i} |P_v \setminus Q_v| C\Big(2A_i + \frac{b_i}{a_i}\Big) \\
&\leq \sum_{i=k+1}^{l} C(a_{i-1}-a_i)n2\frac{b_{i-1}-b_i}{a_{i-1}-a_i} + \sum_{i=k+1}^{l} \tilde{C}(a_{i-1}-a_i)n \\
&= C\big(2n(b_k - b_l) + n(a_k - a_l)\big),
\end{aligned}$$

kde $\tilde{C}$ je konstanta omezující posloupnost b_k/a_k. Protože a_k i b_k jsou konvergentní posloupnosti, můžeme najít $k_0 \geq k_2$ takové, že pro každé $k > l \geq k_0$

$$|b_k - b_l| < \frac{1}{16Cn}\varepsilon \text{ a } |a_k - a_l| < \frac{1}{8Cn}\varepsilon. \tag{4.12}$$

Kombinací nerovností (4.6) až (4.12) jsme pro každé $\varepsilon > 0$ nalezli k_0 splňující pro každé $k > l \geq k_0$ je

$$\|f_k - f_l\|_{W^{1,1}(Q_0)} < \varepsilon.$$

Slabý gradient Df je skoro všude 0 na D, neboť z vlastnosti konvergence v L^p prostorech existuje vybraná podposloupnost f_{k_l} tak, že $\nabla f_{k_l}(x) \overset{l\to\infty}{\to} Df(x)$ skoro všude a přitom platí $|\nabla f_k(x)| = \frac{b_k}{a_k} \to 0$ pro každé $x \in D$.

Pro odhad q-distorze K_q budeme potřebovat odhadnout chování J_f. Jelikož je $D_f(x) = 0$ pro skoro všechny $x \in D$, je i $J_f = 0$ a $K_q = 0$ skoro všude na C. Z Lemmatu 4.2 platí pro skoro všechny $x \in P_v \setminus Q_v$, kde $v \in V^k$,

$$J_f = J_{f_k} \approx A_k\Big(A_k + \frac{B_k}{|x - z_v|}\Big)^{n-1}.$$

Je-li $x \in P_v \setminus Q_v$, potom $2^{-k-1}a_k \le |x - z_v| \le 2^{-k-1}a_{k-1}$. Platí tedy

$$\begin{aligned} A_k + \frac{B_k}{|x - z_v|} &= A_k + \frac{2^{-k-1}b_k}{|x - z_v|} - \frac{2^{-k-1}A_k a_k}{|x - z_v|} \\ &\ge A + \frac{2^{-k-1}b_k}{2^{-k-1}a_{k-1}} - \frac{2^{-k-1}A_k a_k}{2^{-k-1}a_k} = \frac{b_k}{a_{k-1}}. \end{aligned}$$

Celkově máme

$$J_f \ge CA_k\Big(\frac{b_k}{a_{k-1}}\Big)^{n-1} > 0 \text{ pro skoro všechny } x \in \bigcup_{v\in V^k} P_v \setminus Q_v.$$

Právě jsme dokázali, že f má konečnou distorzi.

Zvolíme-li $a_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{k^\alpha}$ a $b_k = \frac{1}{k^\beta}$, potom z rovnice (4.3) dostáváme

$$A_k \approx k^{\alpha-\beta} \text{ a } \frac{b_k}{a_k} \approx k^{-\beta},$$

a proto pro skoro všechny $x \in \bigcup_{v\in V^k} P_v \setminus Q_v$ platí

$$|D_f(x)| \le 2A_k + \frac{b_k}{a_k} \approx k^{\alpha-\beta}.$$

Konečně dostáváme pro skoro všechny $x \in \bigcup_{v\in V^k} P_v \setminus Q_v$

$$|K_q(x)| = \frac{|D_f|^q}{J_f} \le C\frac{\big(2A + \frac{b_k}{a_k}\big)^q}{A\big(\frac{b_k}{a_{k-1}}\big)^{n-1}} \approx \frac{k^{q(\alpha-\beta)}}{k^{\alpha-\beta}k^{-(n-1)\beta}} = k^{\alpha(q-1)}k^{-\beta(q-n)}. \tag{4.13}$$

Máme-li $q > n$, potom pro volbu $\alpha = 1$ a $\beta = \frac{q-1}{q-n}$ je výraz $\alpha(q-1) - \beta(q-n) = 0$. Tudíž výraz napravo je omezený, a proto $K_q \in L^\infty$.

Zbývá ukázat druhou část tvrzení pro $q \le n$. Zvolme $\delta > 0$. Označme $a = \frac{1}{q-1+\delta}$ a zvolme

$$\alpha = 1 \text{ a } \beta = \frac{\delta}{2(n-q)}.$$

Počítejme díky odhadu (4.10) a (4.13)

$$\begin{aligned} \int_{Q_0} {K_q}^a &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{v\in V^k} \int_{P_v\setminus Q_v} K_q^a \le C\sum_{k=1}^{\infty}(a_{k-1} - a_k)k^{a\alpha(q-1)+a\beta(n-q)} \\ &\approx \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2a(q-1)+a\delta/2)}. \end{aligned}$$

Jelikož je

$$-2 + a(q - 1 + \delta/2) = -2 + \frac{q - 1 + \delta/2}{q - 1 + \delta} < -1,$$

řada i integrál konvergují a máme tedy $K_q \in L^{\frac{1}{q-1+\delta}}$.

$\square$

KAPITOLA 5

Spojitost operátoru složení s funkcí s konečnou distorzí

V této kapitole využijeme předešlých poznatků a dokážeme Větu 1.3. K důkazu budeme potřebovat pokročilejší aproximaci funkce ze Sobolevova prostoru lipschitzovskými funkcemi. Posup je inspirován prací [**1**].

LEMMA 5.1. *Buď $B \subset \mathbb{R}^n$ otevřená koule a nechť $u \in W^{1,q}(3B)$, $1 \leq q < \infty$. Potom pro Lebesgueovy body $x, y \in B$ funkce u platí*

$$|u(x) - u(y)| \leq C(n)|x - y|\big(M|Du|(x) + M|Du|(y)\big),$$

kde $Mh(x)$ je Hardy-Littlewoodův maximální operátor funkce $h : 3B \to \mathbb{R}$.

DŮKAZ. Využijeme Poincarého nerovnosti (Věta 2.11). Pro $i \geq 0$ si označme $B_i = B\big(x, 2^{-i}|x - y|\big)$ a $u_{B_i} = \frac{1}{|B_i|}\int_{B_i} u$. Potom

$$\begin{aligned}
|u(x) - u_{B_0}| =& |\lim_{i\to\infty} u_{B_i} - u_{B_0}| = |\sum_{i=0}^{\infty} u_{B_{i+1}} - u_{B_i}| \leq \sum_{i=0}^{\infty} \fint_{B_{i+1}} |u - u_{B_i}| \\
\leq& \sum_{i=0}^{\infty} 2^n \fint_{B_i} |u - u_{B_i}| \leq c(n) \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i}|x - y| \frac{1}{|B_i|} \int_{B_i} |Du| \\
\leq& c(n)|x - y| MDu(x).
\end{aligned}$$

Analogicky odvodíme

$$|u(y) - u_{B(y,|x-y|)}| \leq c(n)|x - y| MDu(y).$$

Označme $D = B(y, |x - y|) \cap B_0$. Potom

$$\begin{aligned}
|u_{B(x,|x-y|)} - u_{B(y,|x-y|)}| &\leq |u_{B_0} - u_D| + |u_{B(y,|x-y|)} - u_D| \\
&\leq \fint_D |u_{B_0} - u(z)|dz + \fint_D |u_{B(y,|x-y|)} - u(z)|dz \\
&\leq \frac{|B_0|}{|D|}\Big(\fint_{B_0} |u_{B_0} - u(z)|dz + \fint_{B(y,|x-y|)} |u_{B(y,|x-y|)} - u(z)|dz\Big) \\
&\leq C(n)|x - y|(M|Du|(x) + M(|Du|(y)).
\end{aligned}$$

Požadovaný odhad získáme z trojúhelníkové nerovnosti a dílčích odhadů:

$$\begin{aligned}
|u(x) - u(y)| \leq& |u(x) - u_{B(x,|x-y|)}| + |u_{B(x,|x-y|)} - u_{B(y,|x-y|)}| + |u(y) - u_{B(y,|x-y|)}| \\
\leq& C(n)|x - y|(M|Du|(x) + M(|Du|(y)).
\end{aligned}$$

□

LEMMA 5.2. *Buď funkce $h \in L^q(\Omega)$, kde $1 \leq q < \infty$, potom*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^q |\{Mh > \lambda\}| = 0.$$

Důkaz. Z nerovnosti (2.1) získáváme, že

$$\lim_{\lambda\to\infty} |\{Mh > \lambda)\}| \leq \lim_{\lambda\to\infty} \frac{C}{\lambda}\|f\|_{L_1(\Omega)} = 0.$$

Pro $q = 1$ nám nerovnost (2.1) přímo dává

$$\lambda|\{Mh > \lambda\}| \leq \int\limits_{\{Mh>\lambda\}} |h|,$$

kde pravá strana jde k 0 z absolutní spojitosti normy, protože $|\{Mh > \lambda\}| \overset{\lambda\to\infty}{\to} 0.$

Pro víme, že $q \in (1,\infty)$ je maximální operátor omezený z L^q do L^q (tedy $\int_\Omega |Mf|^q < \infty$). Využijeme Čebyševovu nerovnost, která tvrdí

$$|\{|h| > \lambda\}| \leq \frac{1}{\lambda^q} \int\limits_{\{|h|>\lambda\}} |h|^q, \text{ pro každou } h \in L^q(\Omega).$$

Tedy

$$\lambda^q|\{Mf > \lambda\}| \leq \int\limits_{\{Mf>\lambda\}} |Mf|^q.$$

Analogicky jako výše pravá strana opět pravá strana konverguje k 0.

□

Lemma 5.3. *Buď funkce $u \in W^{1,q}\big(B(x_0, 3r)\big)$, kde $1 \leq q < \infty$, potom existuje posloupnost funkcí u_k s lipschitzovskou konstantou Ck a měřitelných množin F_k, takových že $F_k \subset \{u = u_k\}$, $F_k \subset F_{k+1}$*

$$\lim_{k\to\infty} |B(x_0, r) \setminus F_k| = 0 \ \text{ a } u_\lambda \overset{k\to\infty}{\to} u \text{ ve } W^{1,q}(B).$$

Je-li navíc $q > n$, potom u_k konvergují k $\tilde{u}$ stejnoměrně, kde $\tilde{u}$ je spojitý reprezentant u.

Důkaz. Označme si $B = B(x_0, r)$ a pro $k > 0$ položme

$$F_k = \{x \in B : M(|\nabla u|) \leq k\} \cap \{x : x \text{ je Lebesgueův bod funkce } u\}.$$

Potom zřejmě $|B \setminus F_k| \overset{k\to\infty}{\to} 0$.

Z Lemmatu 5.1 vidíme, že zobrazení u je na F_k lipschitzovské. Podle McShaneovy věty 2.2 lze jej rozšířit na $\mathbb{R}^n$ s lipschitzovskou konstantou Ck, kde $C \geq 1$ závisí pouze na dimenzi. Toto rozšíření si označme u_k.

Protože jsou funkce u_k lipschitzovské, existuje ve skoro všech bodech totální diferenciál a můžeme jej odhadnout $|\nabla u_k| \leq Ck$. Navíc pro toto rozšíření platí $\nabla u_k = Du$ skoro všude na F_k. Totiž, je-li x bod hustoty v F_k, kde existuje aproximativní diferenciál u a rovná se hodnotě slabé derivace, potom podle Lemmatu 2.10 je $\nabla u_k(x) = Du(x)$.

Nejdříve si všimněme, že funkce ∇u_k konvergují k Du ve $L^q(B)$:

$$\begin{aligned}\int\limits_B |\nabla u_k - Du|^q = \int\limits_{B\setminus F_k} |\nabla u_k - Du|^q &\leq \int\limits_{B\setminus F_k} |\nabla u_k|^q + \int\limits_{B\setminus F_k} |Du|^q \\ &\leq |B \setminus F_k|Ck^q + \int\limits_{B\setminus F_k} |Du|^q \overset{k\to\infty}{\to} 0.\end{aligned},$$

kde jsme využili odhadu $k^q|\{M(|Du|) > k\}| \overset{k\to\infty}{\to} 0$ z Lemmatu 5.2 a znalosti $|B \setminus F_k| \overset{k\to\infty}{\to} 0$.

Zbývá ukázat, že u_k konvergují k u v $L^q(B)$. Jelikož $|B \setminus F_k|$ klesá k nule, existuje k_0 a bod y takové, že pro všechny $k > k_0$ je $y \in F_k$. Potom platí

$$\begin{aligned}\int\limits_B |u_k - u|^q &= \int\limits_{B\setminus F_k} |u_k - u|^q \le \int\limits_{B\setminus F_k} |u_k|^q + \int\limits_{B\setminus F_k} |u|^q \\ &\le \int\limits_{B\setminus F_k} (|u_k(y)|^q + |u_k(x) - u_k(y)|^q) + \int\limits_{B\setminus F_k} |u|^q \\ &\le |B \setminus F_k|(|u(y)|^q + Ck^q r^q) + \int\limits_{B\setminus F_k} |u|^q \overset{k\to\infty}{\to} 0.\end{aligned}$$

Při odhadu jsme opět využili vzorce $k^q|\{M(|Du|) > k\}| \overset{k\to\infty}{\to} 0$.

Pokud je navíc $q > n$, pak z Věty o vnoření 2.13 existuje α Hölderovská funkce $\tilde{u}$, pro nějaké $\alpha \in (0,1)$, která se rovná u skoro všude. Navíc platí odhad

$$\sup_{x\in B} |u_k(x) - u_l(x)| \le C\|u_k - u_l\|_{W^{1,q}(B)},$$

tedy u_k je cauchyovská posloupnost v $C(B)$ a existuje spojitá funkce v tak, že $u_k \rightrightarrows v$. Jelikož funkce u_k konvergují k $\tilde{u}$ ve skoro všech bodech $x \in B$, funkce $\tilde{u}$ a v se rovnají skoro všude. A protože $\tilde{u}, v$ jsou spojité funkce, nutně platí $\tilde{u}(x) = v(x)$ pro každé $x \in B$.

□

Důkaz Věty 1.3. Mějme u z $W^{1,p}_{loc}(\Omega_2)$ libovolnou funkci a bod $x_0 \in \Omega_1$. Nalezneme kouli B a $r > 0$ takovou, že $3B \subset\subset \Omega_2$ a $f\big(B(x_0,r)\big) \subset B$. Chceme ukázat, že $u \circ f \in W^{1,1}\big(B(x_0,r)\big)$ a $|D(u\circ f)|$ in $L^p\big(B(x_0,r)\big)$.

Z Lemmatu 5.3 existuje posloupnost u_k funkcí s lipschitzovskou konstantou ck a posloupnost měřitelných množin $F_k \subset B$ takových, že

$$u_k = u \text{ na } F_k, F_k \subset F_{k+1} \text{ a } \lim_{k\to\infty} |F_k| = |B|.$$

Položme $g_j = u_j \circ f$ pro $j \in \mathbb{N}$. Protože u_j jsou lipschitzovské funkce, dostáváme z Lemmatu 3.1, že $g_j \in W^{1,p}\big(B(x_0,r)\big)$.

Chceme ukázat, že ∇g_j je cauchyovská posloupnost v $L^p\big(B(x_0,r), \mathbb{R}^n\big)$. Využitím Lemmatu 3.1 o derivaci složené funkce, Poznámky 3.2, Hölderovy nerovnosti a Věty 2.15 o substituci získáváme pro v lipschitzovskou funkci následující vztah (5.1)

$$\begin{aligned}\int_{B(x_0,r)} \Big|D\Big(v\big(f(x)\big)\Big)\Big|^p dx &= \int_{B(x_0,r)} \Big|\nabla v\big(f(x)\big)\Big|^p \big|Df(x)\big|^p dx \\ &\leq \int_{B(x_0,r)} \Big|\nabla v\big(f(x)\big)\Big|^p \big|J_f(x)\big|^{\frac{p}{q}} \big(K_q(x)\big)^{\frac{p}{q}} dx \\ &\leq \Big(\int_{B(x_0,r)} \big|\nabla v\big(f(x)\big)\big|^q |J_f(x)| dx\Big)^{\frac{p}{q}} \Big(\int_{B(x_0,r)} \big(K_q(x)\big)^{\frac{p}{q}\frac{q}{q-p}}\Big)^{\frac{q-p}{q}} \\ &= \Big(\int_{f(B(x_0,r))} \big(\nabla v(y)\big)^q dy\Big)^{\frac{p}{q}} \Big(\int_{B(x_0,r)} \big(K_q(x)\big)^{\frac{p}{q-p}}\Big)^{\frac{q-p}{q}} \\ &\leq \|\nabla v\|^p_{L^q(f(B(x_0,r)))} \|K_q\|^{\frac{p}{q}}_{L^{\frac{p}{q-p}}(B(x_0,r))} \\ &\leq \|\nabla v\|^p_{L^q(B)} \|K_q\|^{\frac{p}{q}}_{L^{\frac{p}{q-p}}\big(B(x_0,r)\big)}.\end{aligned}$$

Aplikujeme-li tento odhad na funkci $v = u_j - u_k$, snadno získáme, že posloupnost $\nabla(u_j \circ f) = Dg_j$ je cauchyovská v $L^p\big(B(x_0,r),\mathbb{R}^n\big)$. Proto existuje zobrazení $g \in L^p\big(B(x_0,r),\mathbb{R}^n\big)$ takové, že $Dg_j \overset{j\to\infty}{\to} g$ v $L^p\big(B(x_0,r),\mathbb{R}^n\big)$.

Je-li $q \leq n$, potom díky Větě 1.5 splňuje zobrazení f Lusinovu (N^{-1}) podmínku, tedy f^{-1} zobrazuje množiny nulové míry na množiny nulové míry. Jelikož $|B \setminus F_j|$ konverguje k 0, získáváme, že množiny $A_j := B(x_0,r) \cap f^{-1}(F_j)$ splňují

$$\begin{aligned}\lim_{j\to\infty} |A_j| = \lim_{j\to\infty} |B(x_0,r) \cap f^{-1}(F_j)| &= \big|B(x_0,r) \cap \big(\bigcup_{j=1}^{\infty} f^{-1}(F_j)\big)\big| \\ = \big|B(x_0,r) \cap f^{-1}(\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j)\big| &= \big|B(x_0,r) \cap f^{-1}\big(\bigcap_{j=1}^{\infty} (B \setminus F_j)\big)\big| = |B(x_0,r)|.\end{aligned}$$

Proto existuje j_0 takové, že $|A_{j_0}| \geq \frac{1}{2}|B(x_0,r)|$. Z definice funkce g_j vidíme, že $g_j(x) = u \circ f(x)$ pro všechny body x z A_{j_0}, a proto $g_j(x) - g_i(x) = 0$ na A_{j_0} pro každé $i,j \geq j_0$. Označme si $h = g_i - g_j$. S využitím znalosti $h_{A_{j_0}} = 0$, Poincarého nerovnosti (Věta 2.11) a $|A_{j_0}| \geq \frac{1}{2}|B(x_0,r)|$ dostáváme

$$\begin{aligned}
\int_{B(x_0,r)} |g_i - g_j| &= \int_{B(x_0,r)} |h| = \int_{B(x_0,r)} |h(x) - h_{A_{J_0}}|dx \\
&\leq \int_{B(x_0,r)} |h(x) - h_{B(x_0,r)}|dx + |B(x_0,r)||h_{A_{j_0}} - h_{B(x_0,r)}| \\
&\leq C(n)r \int_{B(x_0,r)} |\nabla h| + c(n)r^n \fint_{A_{j_0}} |h(x) - h_{B(x_0,r)}|dx \\
&\leq C(n)r \int_{B(x_0,r)} |\nabla h| + c(n)r^n \frac{|B(x_0,r)|}{|A_{j_0}|} \fint_{B(x_0,r)} |h(x) - h_{B(x_0,r)}|dx \\
&\leq C(n,r) \int_{B(x_0,r)} |\nabla h| \leq C(n,r) \int_{B(x_0,r)} |\nabla g_j - \nabla g_i|.
\end{aligned}$$

Jelikož je $\{\nabla g_j\}$ cauchyovská posloupnost v $L^1\big(B(x_0,r),\mathbb{R}^n\big)$, je nutně posloupnost $\{g_j\}$ cauchyovská v $L^1\big(B(x_0,r)\big)$. A protože g_j konverguje k $u \circ f$ v bodech $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_j$, tedy skoro všude, máme $g_j \to u \circ f$ v $L^1\big(B(x_0,r)\big)$.

Pokud je $q > n$, pak z Lemmatu 5.3 máme $u_j \rightrightarrows u$. Z odhadu

$$\sup_{x \in B(x_0,r)} \big|u_j\big(f(x)\big) - u\big(f(x)\big)\big| \leq \sup_{y \in B} |u_j(y) - u(y)|,$$

obdržíme okamžitě $u_j \circ f \rightrightarrows u \circ f$, z čehož nám přirozeně plyne $g_j \to u \circ f$ v $L^1\big(B(x_0,r)\big)$.

Z definice slabé derivace máme vztah

$$\int_{B(x_0,r)} \nabla g_j(x)\phi(x) = -\int_{B(x_0,r)} g_j(x)\nabla\phi(x)$$

pro každou testovací funkci $\phi \in C_c^\infty(B(x_0,r))$. Jelikož $\nabla g_j \to g$ v $L^p\big(B(x_0,r),\mathbb{R}^n\big)$ a $g_j \to u \circ f$ v $L^1\big(B(x_0,r)\big)$, dostáváme limitním přechodem vztah

$$\int_{B(x_0,r)} g(x)\phi(x) = -\int_{B(x_0,r)} u \circ f(x)\nabla\phi(x).$$

Což ovšem znamená, že $g \in L^p\big(B(x_0,r),\mathbb{R}^n\big)$ je slabým gradientem funkce $u \circ f$ na $B(x_0,r)$. Z Věty 2.12 o vnoření dostáváme, že $u \circ f \in L^p\big(B(x_0,r)\big)$, tedy $u \circ f \in W^{1,p}_{loc}(\Omega_1)$.

Zbývá ukázat, že T_f je spojitý. Ze vztahu (5.1) pro každou kouli $B(x_0,r)$ takovou, že existuje koule B splňující $f\big(B(x_0,r)\big) \subset B$ a $3B \subset \Omega_2$, platí

$$\int_{B(x_0,r)} |D(u_k \circ f)|^p dx \leq \|\nabla u_k\|^p_{L^q(f(B(x_0,r)))} \|K_q\|^{\frac{p}{q}}_{L^{\frac{p}{q-p}}(B(x_0,r))}.$$

Jelikož ∇u_k konvergují v L^q k Du a $D(u_k \circ f)$ konvergují v L^p k $D(u \circ f)$, dostáváme limitním přechodem, že

$$\int_{B(x_0,r)} |D(u \circ f)|^p dx \leq \|Du\|^p_{L^q(f(B(x_0,r)))} \|K_q\|^{\frac{p}{q}}_{L^{\frac{p}{q-p}}(B(x_0,r))}. \tag{5.2}$$

Z Vitaliho pokrývací Věty 2.14 nalezne spočetný systém $\mathbb{W} = \{B_i, i \in \mathbb{N}\}$ po dvou disjunktních otevřených koulí takových, že pro každé $i \in \mathbb{N}$ existuje bod x_i a poloměr r_i splňující $f(B_i) \subset B(x_i, r_i)$, $B(x_i, 3r_i) \subset \Omega_2$ a

$$\Big|\Omega_1 \setminus \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i\Big| = 0.$$

Potom za použití odhadu (5.2) a Hölderovy nerovnosti můžeme odhadovat

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Omega_1} |D(u\circ f)|^p dx &= \sum_{i\in\mathbb{N}} \int\limits_{B_i} |D(u\circ f)|^p dx \le \sum_{i\in\mathbb{N}} \|Du\|^p_{L^q(f(B_i))} \|K_q\|^{\frac{p}{q}}_{L^{\frac{p}{q-p}}(B_i)} \\
&= \sum_{i\in\mathbb{N}} \Bigg[\Big(\int\limits_{f(B_i)} \big(\nabla v(y)\big)^q dy \Big)^{\frac{p}{q}} \Big(\int\limits_{B_i} \big(K_q(x)\big)^{\frac{p}{q-p}} \Big)^{\frac{q-p}{q}} \Bigg] \\
&\le \Bigg[\sum_{i\in\mathbb{N}} \int\limits_{f(B_i)} \big(\nabla v(y)\big)^q dy \Bigg]^{\frac{p}{q}} \Bigg[\sum_{i\in\mathbb{N}} \int\limits_{B_i} \big(K_q(x)\big)^{\frac{p}{q-p}} \Bigg]^{\frac{q-p}{q}} \\
&\le \Big(\int\limits_{\Omega_2} \big(\nabla v(y)\big)^q dy \Big)^{\frac{p}{q}} \Big(\int\limits_{\Omega_1} \big(K_q(x)\big)^{\frac{p}{q-p}} \Big)^{\frac{q-p}{q}}.
\end{aligned}$$

Umocněním nerovnosti na $1/p$, získáme požadovaný odhad (1.1). $\square$

Literatura

[1] S. Hencl a P. Koskela: *Mappings of finite disortion: composition operator*, Ann. Acad. Sci. Fen. Math. 33 (2008), 65-80.

[2] J. Kauhanen, P. Koskela a J. Malý: *Mapping of finite disortion: Condition N*, Michigan Math. J.49 (2001), 169-181.

[3] P. Koskela a J. Malý: *Mapping of finite disortion: The zero set of Jacobian*, J. Eur. Math. Soc.5 (2000), 95-105.

[4] J. Malý: *Teorie derivace pro pokročilé*, skripta, 2008.

[5] J. Malý: *Teorie integrálu pro pokročilé*, skripta, 2009.

[6] A. D. Ukhlov: *On mappings generating the embeddings of Sobolev spaces*, Siberian Math. J. 34 (1993), 165-171.