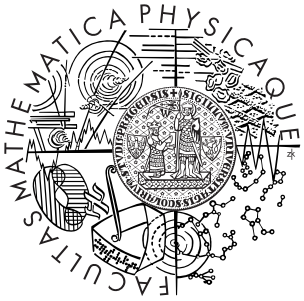
Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

SVOČ (2009)



Bc. Přemysl Bejda

Diskrétní a omezené vysvětlované proměnné v ekonometrii

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

prof. RNDr. Tomáš Cipra, DrSc., KPMS

ekonometrie

2008/2009

Obsah

Název práce: Diskrétní a omezené vysvětlované proměnné v ekonometrii
Autor: Přemysl Bejda
Katedra (ústav): Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Tomáš Cipra, DrSc.
e-mail vedoucího: Tomas.Cipra@mff.cuni.cz

Abstrakt: V předložené práci studujeme diskrétní a omezené vysvětlované proměnné. Začneme binárními proměnnými. Ukážeme příklad na praktických datech, ve kterém předvedeme možnosti softwaru EViews a doplníme je o vlastní procedury, které nám pomohou v analýze dat. Pomocí metody Jackknife, či za pomoci testovací množiny (vybírané prostým náhodným výběrem) zkoumáme, jak je náš model schopen předpovídat. Srovnáme modely logit, probit a gompit. Doplníme graf odhadu podmíněné pravděpodobnosti. Výše zmíněné funkce nejsou v EViews přímo implementovány. Podobně postupujeme v případě ordinálních vysvětlovaných proměnných. Používáme stejná data jako v předchozím příkladu a také doplníme výstupy z EViews o metodu Jackknife, prostý náhodný výběr a grafy podmíněných pravděpodobností. Zabýváme se statistikou, která by nám mohla pomoci při diskusi o vhodnosti modelu. V další části se zaměříme na omezené vysvětlované proměnné. Podíváme se především na jejich aplikaci a budeme zkoumat proměnnou vyjadřující dobu trvání. Uvedeme stručně teorii k analýze přežití. Tohoto tématu se týká poslední příklad, který se zabývá tím, do kdy se nějaký výrobek přestane prodávat. Výpočty se provádí v R, neboť v EViews tato problematika není implementována. Většina pasáží je přejata z diplomové práce.

Klíčová slova: Diskrétní a omezené vysvětlované proměnné, ekonometrické modelování, EViews, R

Kapitola 1

Diskrétní vysvětlované proměnné

1.1 Binární vysvětlovaná proměnná

Velmi častým typem kategoriální vysvětlované proměnné je *binární proměnná (binary dependent variable)* nabývající jako svých hodnot pouze jedničky či nuly. Tento typ proměnné se vyskytuje především v těchto případech:

- Jedná se o dummy proměnnou, tj. proměnnou, která nabývá kvůli své podstatě pouze dvou hodnot. Může to být logická proměnná, odpověď v anketě ano či ne atd.

- Jedná se o proměnnou, která je vytvořená z jiné jejím zjednodušením, např. cena výrobku vyšší, či nižší, než padesát korun atd.

Lineární model se může konstruovat stejně jako v případě, kdy vysvětlovaná proměnná je spojitá. Jenže v tuto chvíli nemá velký význam prokládat mrakem bodů přímku. Vzniká klíčová otázka interpretace takového modelu.

Podívejme se tedy na daný model blíže. Řekněme, že pro binární vysvětlovanou proměnnou y_t (v čase t, nebo pro $t-$tou pozorovanou jednotku průřezového výběru) platí: 1 znamená, že došlo k výskytu sledovaného jevu, a 0, že k němu nedošlo. Pak lze pravděpodobnostní model zapsat následujícím způsobem

$$\mathsf{P}(y_t = 1|\boldsymbol{x}_{t\cdot}, \boldsymbol{\beta}) = 1 - F(-\boldsymbol{x}_{t\cdot}\boldsymbol{\beta}), \qquad t = 1, \ldots, T, \tag{1.1}$$

či ekvivalentně

$$\mathsf{P}(y_t = 0|\boldsymbol{x}_{t\cdot}, \boldsymbol{\beta}) = F(-\boldsymbol{x}_{t\cdot}\boldsymbol{\beta}), \qquad t = 1, \ldots, T, \tag{1.2}$$

kde $F(\cdot)$ je vhodná spojitá distribuční funkce. Tento způsob zápisu předpokládá, že čím je výraz $\boldsymbol{x}_{t\cdot}\boldsymbol{\beta}$ vyšší, tím bude i pravděpodobnost, že y_t nabyde hodnoty 1. Je-li distribuční funkce symetrická, resp. její hustota funkce sudá, pak lze (1.1) a (1.2) přepsat do tvaru

$$\mathsf{P}(y_t = 1|\boldsymbol{x}_{t\cdot}, \boldsymbol{\beta}) = F(\boldsymbol{x}_{t\cdot}\boldsymbol{\beta}), \qquad \mathsf{P}(y_t = 0|\boldsymbol{x}_{t\cdot}, \boldsymbol{\beta}) = 1 - F(\boldsymbol{x}_{t\cdot}\boldsymbol{\beta}).$$

Poznámka 1.1 *Výše zmíněný problém interpretace se může řešit různými přístupy. My zde uvedeme tři z nich.*

1. V prvním případě budeme používat skrytou, neboli latentní proměnnou y^*, která je provázána s regresory $\boldsymbol{X}$ lineárním modelem

$$y_t^* = \boldsymbol{x}_{t\cdot}\boldsymbol{\beta} + \varepsilon_t, \tag{1.3}$$

kde ε_t jsou iid náhodné veličiny s nulovou střední hodnotou. To znamená , že (1.3) je obvyklý lineární model a y^* je spojitá vysvětlovaná proměnná. Jakých hodnot nabývá náhodná veličina y, určíme následujícím způsobem (ptáme se, zda je její hodnota nad, či pod nulovým prahem)

$$y_t = \begin{cases} 1 & \text{pro } y_t^* > 0 \\ 0 & \text{pro } y_t^* \leq 0. \end{cases}$$

Odtud dostaneme

$$\mathsf{P}(y_t = 1|\boldsymbol{x}_{t\cdot}, \boldsymbol{\beta}) = \mathsf{P}(y_t^* > 0|\boldsymbol{x}_{t\cdot}, \boldsymbol{\beta}) = \mathsf{P}(\boldsymbol{x}_{t\cdot}\boldsymbol{\beta} + \varepsilon_t > 0) = 1 - F(-\boldsymbol{x}_{t\cdot}\boldsymbol{\beta}).$$

Nyní ovšem interpretujeme $F(\cdot)$ jako distribuční funkci reziduální složky ε modelu (1.3). Volba nulové úrovně prahu není podstatná, pokud model (1.3) obsahuje intercept.

2. Další interpretace využívá podmíněné střední hodnoty

$$\begin{aligned} \mathsf{E}(y_t|\boldsymbol{x}_{t\cdot}, \boldsymbol{\beta}) &= 1 \cdot \mathsf{P}(y_t = 1|\boldsymbol{x}_{t\cdot}, \boldsymbol{\beta}) + 0 \cdot \mathsf{P}(y_t = 0|\boldsymbol{x}_{t\cdot}, \boldsymbol{\beta}) \\ &= \mathsf{P}(y_t = 1|\boldsymbol{x}_{t\cdot}, \boldsymbol{\beta}) = 1 - F(-\boldsymbol{x}_{t\cdot}\boldsymbol{\beta}). \end{aligned}$$

Jestliže píšeme

$$y_t = \big(1 - F(-\boldsymbol{x}_{t\cdot}\boldsymbol{\beta})\big) + \varepsilon_t,$$

potom ε představuje odchylku náhodné veličiny y od její podmíněné střední hodnoty a platí pro ni

$$\mathsf{E}(\varepsilon_t|\boldsymbol{x}_{t\cdot}, \boldsymbol{\beta}) = 0, \qquad \mathsf{var}(\varepsilon_t|\boldsymbol{x}_{t\cdot}, \boldsymbol{\beta}) = F(-\boldsymbol{x}_{t\cdot}\boldsymbol{\beta})\big(1 - F(-\boldsymbol{x}_{t\cdot}\boldsymbol{\beta})\big).$$

Rozptyl stačí spočítat pro y_t, neboť $1 - F(-\boldsymbol{x}_{t\cdot}\boldsymbol{\beta})$ je díky podmíněnosti pouze konstanta.

3. Kdybychom použili nejjednodušší možnou konstrukci a model zapsali ve tvaru $y_t = \boldsymbol{x}_{t\cdot}\boldsymbol{\beta} + \varepsilon_t$ a díky nulové střední hodnotě reziduí spočítali $\boldsymbol{x}_{t\cdot}\boldsymbol{\beta} = \mathsf{E}(y_t) = 0 \cdot \mathsf{P}(y_t = 0) + 1 \cdot \mathsf{P}(y_t = 1) = \mathsf{P}(y_t = 1)$, pak by se vyskytly následující problémy. Bylo by nutné přidat omezení $0 \leq \boldsymbol{x}_{t\cdot}\boldsymbol{\beta} \leq 1$ a rezidua by byla heteroskedastická. Tato interpretace se tedy nepoužívá.

Jednotlivým parametrům β_i nemůžeme přiřknout stejný význam, jako je tomu u obvyklého lineární modelu, ale pokusme se o následující analýzu

$$\frac{\partial \mathsf{E}(y_t|\boldsymbol{x}_{t\cdot}, \boldsymbol{\beta})}{\partial x_{ti}} = \frac{\partial \mathsf{P}(y_t = 1|\boldsymbol{x}_{t\cdot}, \boldsymbol{\beta})}{\partial x_{ti}} = f(-\boldsymbol{x}_{t\cdot}\boldsymbol{\beta}) \cdot \beta_i, \tag{1.4}$$

kde $f(\cdot)$ je hustota odpovídající nějaké distribuční funkci $F(\cdot)$. Odtud

$$\frac{\partial \mathsf{E}(y_t|\boldsymbol{x}_{t\cdot},\boldsymbol{\beta})/\partial x_{ti}}{\partial \mathsf{E}(y_t|\boldsymbol{x}_{t\cdot},\boldsymbol{\beta})/\partial x_{tj}} = \frac{\beta_i}{\beta_j},$$

tedy podíl dvou parametrů odpovídá podílu dvou rychlostí změny při změně dvou odpovídajících regresorů. Používaným nástrojem je *preferenční poměr (odds ratio)*

$$\frac{\mathsf{P}(y_t = 1|\boldsymbol{x}_{t\cdot},\boldsymbol{\beta})}{\mathsf{P}(y_t = 0|\boldsymbol{x}_{t\cdot},\boldsymbol{\beta})} = \frac{1 - F(-\boldsymbol{x}_{t\cdot}\boldsymbol{\beta})}{F(-\boldsymbol{x}_{t\cdot}\boldsymbol{\beta})} = \frac{F(\boldsymbol{x}_{t\cdot}\boldsymbol{\beta})}{1 - F(\boldsymbol{x}_{t\cdot}\boldsymbol{\beta})},$$

který relativně udává pravděpodobnost výskytu jevu vůči tomu, že jev nenastane. Poslední rovnost platí pouze za předpokladu, že $F(\cdot)$ je symetrická.

V praxi se ovšem používají jen některá speciální rozdělení. Uveďme tedy nejčastěji užívané modely.

1. *Probit:*

$$\mathsf{P}(y_t = 1|\boldsymbol{x}_{t\cdot},\boldsymbol{\beta}) = 1 - F(-\boldsymbol{x}_{t\cdot}\boldsymbol{\beta}) = 1 - \Phi(-\boldsymbol{x}_{t\cdot}\boldsymbol{\beta}) = \Phi(\boldsymbol{x}_{t\cdot}\boldsymbol{\beta}).$$

   Používá distribuční funkci normálního rozdělení $\Phi(\cdot)$, přesněji distribuční funkci rozdělení $N(0,1)$.

2. *Logit*

$$\mathsf{P}(y_t = 1|\boldsymbol{x}_{t\cdot},\boldsymbol{\beta}) = 1 - F(-\boldsymbol{x}_{t\cdot}\boldsymbol{\beta}) = 1 - \frac{\mathrm{e}^{-\boldsymbol{x}_{t\cdot}\boldsymbol{\beta}}}{1+\mathrm{e}^{-\boldsymbol{x}_{t\cdot}\boldsymbol{\beta}}} = \frac{\mathrm{e}^{\boldsymbol{x}_{t\cdot}\boldsymbol{\beta}}}{1+\mathrm{e}^{\boldsymbol{x}_{t\cdot}\boldsymbol{\beta}}}$$

   používá distribuční funkci logistického rozdělení. Výsledky jsou velmi podobné, jako v předchozím případě. Hustota logistického rozdělení je $f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}$. Jeho referenční poměr je $\exp(\boldsymbol{x}_{t\cdot}\boldsymbol{\beta})$. Bližší informace o logistickém rozdělení lze najít např v [3, str. 23]. Pak stačí dosadit $a = 0$ a $b = 1$. Jednoduchým výpočtem se pak už dostaneme k předchozím vzorcům.

3. *Gompit*

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(y_t = 1|\boldsymbol{x}_{t\cdot},\boldsymbol{\beta}) &= 1 - F(-\boldsymbol{x}_{t\cdot}\boldsymbol{\beta}) = 1 - \big(1 - \exp\big(-\mathrm{e}^{-\boldsymbol{x}_{t\cdot}\boldsymbol{\beta}}\big)\big)\\ &= \exp\big(-\mathrm{e}^{-\boldsymbol{x}_{t\cdot}\boldsymbol{\beta}}\big).\end{aligned}$$

   Distribuční funkce má stejné rozdělení jako náhodná veličina s extremálním rozdělením typu I. Pomocí tohoto rozdělení se modelují extremální hodnoty. Je nesymetrické s nenulovou šikmostí.

Poznámka 1.2 *Samozřejmě vyvstává přirozená otázka, které z těchto tří rozdělení zvolit. Logistické rozdělení má distribuční funkci velmi podobnou normálnímu, jen má těžší „chvosty." Připomíná t-rozdělení se sedmi stupni volnosti. Z tohoto vyplývá, že pro hodnoty $\boldsymbol{x}_{t\cdot}\boldsymbol{\beta}$, které jsou blízké nule, řekněme, že se pohybují v intervalu (-1,2;1,2), dostaneme u obou modelů velmi podobné pravděpodobnosti. Logit model dává větší pravděpodobnosti hodnotě $y = 0$, pokud $\boldsymbol{x}_{t\cdot}\boldsymbol{\beta}$ je velmi malé. Naopak pokud $\boldsymbol{x}_{t\cdot}\boldsymbol{\beta}$ je vysoké, pak dostaneme u modelu logit nízký odhad pravděpodobnosti toho, že $y = 0$ ve srovnání s modelem probit.*

Je obtížné dát obecné pravidlo, zda vybrat logit, či probit, neboť by bylo nutné znát dopředu správné parametry $\boldsymbol{\beta}$. Ovšem v následujících dvou případech se mohou výsledky

z obou rozdělení lišit podstatně, a to pokud je u vysvětlované proměnné znatelně více pozorování jednoho druhu. Nebo pokud má důležitá vysvětlující proměnná vysokou variabilitu, a to zvláště pokud je pravdivý i první případ.

Pak je většinou nutné rozlišovat případ od případu. Někdy lze preferovat jedno rozdělení před druhým, ale není vyřešeno, jak zobecnit vhodnost použití toho kterého modelu. Hlouběji se touto otázkou zabývá článek [2].

Ovšem ve většině případů se nezdá, že by byl významný rozdíl v použití modelů probit a logit.

Jiná situace nastane, pokud použijeme asymetrické rozdělení, např. model gompit. Potom se výsledky mohou lišit více. I v tomto případě je ovšem těžké rozhodnout, zda použít gompit, nebo předchozí dva.

Odhad parametru $\boldsymbol{\beta}$ se většinou provádí metodou maximální věrohodnosti, čili ML metodou. Tato metoda bývá též používána softwarem. O metodě maximální věrohodnosti viz [3, str. 146]. Věrohodnostní funkce

$$l(\boldsymbol{\beta}) = \prod_{t=1}^{T} \big(1 - F(-\boldsymbol{x}_{t\cdot}\boldsymbol{\beta})\big)^{y_t} \big(F(-\boldsymbol{x}_{t\cdot}\boldsymbol{\beta})\big)^{1-y_t}$$

přejde po zlogaritmování do tvaru

$$L(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{t=1}^{T} y_t \ln\big(1 - F(-\boldsymbol{x}_{t\cdot}\boldsymbol{\beta})\big) + \sum_{t=1}^{T} (1 - y_t) \ln\big(F(-\boldsymbol{x}_{t\cdot}\boldsymbol{\beta})\big). \tag{1.5}$$

V případě symetrické distribuční funkce můžeme psát

$$L(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{t=1}^{T} \ln\big(F(\boldsymbol{x}_{t\cdot}\boldsymbol{\beta})\big) + \sum_{t=1}^{T} (1 - y_t) \ln\big(1 - F(\boldsymbol{x}_{t\cdot}\boldsymbol{\beta})\big).$$

Tuto funkci budeme maximalizovat přes $\boldsymbol{\beta}$. Tak získáme odhad $\hat{\boldsymbol{\beta}}$.

Lze také konzistentně odhadnout (asymptotickou) rozptylovou matici tohoto odhadu. Např. v modelu logit vypadá

$$\left(\sum_{t=1}^{T} f(\boldsymbol{x}_{t\cdot}\hat{\boldsymbol{\beta}}) \boldsymbol{x}_{t\cdot}^{\top} \boldsymbol{x}_{t\cdot} \right)^{-1},$$

kde $f(\cdot)$ je hustota logistického rozdělení.

Kvalita odhadnutého modelu se posuzuje pomocí tzv. *McFaddenova koeficientu* R^2_{McFadden}. V praxi se používá obdobně jako koeficient determinace. Je založen na věrohodnostním poměru

$$R^2_{\text{McFadden}} = 1 - \frac{L_U}{L_R},$$

kde L_U je maximální hodnota logaritmické věrohodnostní funkce (1.5) a L_R je její maximální hodnota, pokud platí omezení $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_k = 0$.

Předchozí modely můžeme použít pro předpověď. Mějme vektor vysvětlujících proměnných x^* a chtějme odhadnout, jaká by měla být hodnota vysvětlované proměnné. Model předpovídá, že daný jev nastane (tj. $\bar{y} = 1$), pokud

$$\hat{\hat{\mathsf{P}}}^* = 1 - F(-\bar{\boldsymbol{x}}^\top \hat{\boldsymbol{\beta}}) \geq 0,5. \tag{1.6}$$

Další užitečnou pomůckou, která se uvádí na výstupu mnoha softwarů je počet těch t, kde $t = 1, \ldots, T$, pro která by daný model dával správné výsledky. Tj. pro dané $\boldsymbol{x_t}$ by předpověděl skutečnou hodnotu y_t.

Příklad 1.1 *Nyní si ukažme příklad odhadu nějaké binární proměnné pomocí výše zmíněných modelů.*

Nejprve se ovšem musíme seznámit s daty, která budeme používat. Byla převzata z [8]. Tento článek je velmi zajímavý a obsahuje podrobnou analýzu dat. My s nimi budeme pracovat odlišným způsobem, protože je používáme pouze kvůli demonstračním účelům. Ve výše zmíněném článku lze také nalézt jejich podrobnější popis.

Odkud tedy pochází naše data? V Austrálii byl prováděn test, kterého se účastnilo 134 lidí, 88 žen a 46 mužů. Většina z nich byli studenti vysoké školy. Jejich věk se průměrně pohyboval okolo 23 let. Přitom 66 z nich studovalo psychologii a ostatní většinou humanitní vědy jako sociologii, historii aj. Byli vybíráni přímo ve škole nebo v kavárně.

Účastníci byli rozděleni do dvou skupin. Jedné skupině bylo sděleno, že pokud budou postupovat správně, mohou vyhrát 150 ATS (australských šilinků), což je přibližně 200 korun. V druhé skupině pouze řekli, ať si představí, že mohou danou částku vyhrát.

Účastníci byli znovu rozděleni do dvou skupin, ale jiných než v předchozím případě. Oběma skupinám byly předloženy příklady z testu zkoumajícího znalost slov. První skupině bylo ukázáno obtížné zadání a druhé jednodušší. Skupiny také později dostanou různé testy. První skupina lehčí, druhá obtížnější.

Po této proceduře si každý mohl vybrat z následujících možností:

1. *Psát test a v případě, že by výsledek dopadl dobře, získat slíbený finanční obnos nebo si představit jeho získání. Výsledek je dobrý, pokud se nachází v horní půli mezi ostatními výsledky. Tedy je lepší než nejméně 50% ostatních výsledků. Této možnosti volby říkejme test. Resp. jedinec si vybral možnost Test.*[1]

2. *Hodit šestistěnnou kostkou. S 50% pravděpodobností vyhrát. V tomto případě budeme mluvit o možnosti loterie.*

Účastníkům byly po výběru kladeny otázky jako: „Jste si jist, že jste udělal(a) správné rozhodnutí "; „Jak dobrý budete v testu?";„Kolik bodů si myslíte, že získáte?" aj. Tyto odpovědi byli kvantifikovány. Později se o nich ještě zmíníme, když budeme mluvit o veličinách.

Nezávisle na volbě uchazeče se psal test a házelo kostkou. Tj. všichni psali test a každý také hodil kostkou. Poté byly testy vyhodnoceny a uchazeči odměněni. Znovu jim bylo položeno několik otázek jako: „Jste spokojeni se svými výsledky testu?"

Popišme veličiny, které se v datech objevují. Názvy jsme převedli do češtiny.

[1] Výsledky budou porovnávány v příslušné skupině obtížnosti

Název	*Popis*	*Hodnoty*
obt	*Obtížnost testu (1=těžký)*	*0, 1*
plat	*Zda účastník obdrží skutečně peníze, nebo si má pouze představovat jejich obdržení. (1=dostane peníze)*	*0, 1*
hlas	*Zda si jedinec vybral test, nebo loterii. (1= Test)*	*0, 1*
jist	*„Jste si jist, že jste si vybral správně?“ (7=velmi jist)*	*1 , . . . , 7*
zmenroz	*„Jak obtížné by pro Vás bylo změnit rozhodnutí?“ (7=velmi obtížné)*	*1 , . . . , 7*
dulez	*„Je pro Vás důležité uspět v testu?“ (7= velmi důležité)*	*1 , . . . , 7*
odhobt	*„Myslíte si, že test bude obtížný?“ (7= ano, velmi)*	*1 , . . . , 7*
buddobr	*„Jak dobrý budete v testu?“ (7= velmi dobrý)*	*1 , . . . , 7*
budbod	*„Kolik bodů z 20 možných nejspíš získáte?“ (Čím více bodů, tím lepší výsledek)*	*0 , . . . , 20*
budostbod	*„Jaký bude průměrný výsledek ostatních účastníků?“*	*0 , . . . , 20*
vysl	*Výsledek testu.*	*0 , . . . , 20*
spokoj	*„Jste spokojeni se svým výsledkem?“ (7=velmi spokojen)*	*1 , . . . , 7*
dobrrozh	*„Jste si jisti, že jste udělali správné rozhodnutí ohledně výběru mezi testem a loterií?“ Tato otázka byla kladena po testu. (7=velmi jist)*	*1 , . . . , 7*
menit	*„Jak obtížně by se Vám nyní měnilo rozhodnutí týkající se Vaší volby?“ (7=velmi obtížně)*	*1 , . . . , 7*
testobt	*„Zdál se Vám test obtížný?“ (7=velmi obtížný)*	*1 , . . . , 7*
majostbod	*„Kolik bodů bude průměrný výsledek skupiny?“ Tato otázka byla kladena po testu, ale před vyhodnocením výsledků.*	*0 , . . . , 20*
vek	*Věk v letech*	*17 , . . . , 32*
pohl	*Pohlaví (2=muž)*	*1, 2*
leps	*Poměr mezi odhadnutým svým výsledkem a odhadnutým průměrným výsledkem ostatních. Tento poměr se získával z veličin, které se zkoumali před psaním testu.*	*0,29 ;. . .; 1,67*
lipnezost	*„Byl odhad mého výsledku vyšší, než odhadovaný průměrný výsledek skupiny?“ (1=ano)*	*0, 1*

Tabulku s daty viz přiložené CD.

My se budeme zabývat odhadem veličiny hlas*. Tedy tím, jestli si jedinec vybral loterii, či test. Nejprve se pokusíme vysvětlit* hlas *pomocí veličin, jež můžeme zjistit ještě před tím, než účastníkovi vysvětlíme principy našeho testu. Tzn. budeme používat veličiny* plat, pohl, vek *a* obt*.*

Podle různých informačních kritérii jako např. Akaikeho, Schwarzova aj. se zdá být nejlepší odhad, kdy hlas *závisí pouze na konstantě a* obt*.* $R^2_{McFadden}$ *sice trochu klesl, na rozdíl od modelu se všemi proměnnými, ale tento pokles je pouze o 0,4%. Nicméně je také pravda, že* $R^2_{McFadden}$ *je velmi nízký z čehož můžeme usuzovat, že náš model není příliš dobrý.*

Všechny výpočty byly prováděny v EViews. Podívejme se nyní na výstup.

Dependent Variable: HLAS
Method: ML - Binary Probit (Quadratic hill climbing)
Date: 01/01/09 Time: 11:37
Sample (adjusted): 1 134
Included observations: 134 after adjustments
Convergence achieved after 3 iterations
covariance matrix computed using second derivatives

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.341942	0.151945	2.250441	0.0244
OBT	-0.441576	0.219341	-2.013193	0.0441

Mean dependent var	0.552239	S.D. dependent var	0.499130
S.E. of regression	0.493363	Akaike info criterion	1.374770
Sum squared resid	32.12967	Schwarz criterion	1.418021
Log likelihood	-90.10960	Hannan-Quinn criter.	1.392346
Restr. log likelihood	-92.14904	Avg. log likelihood	-0.672460
LR statistic (1 df)	4.078885	McFadden R-squared	0.022132
Probability(LR stat)	0.043422		

Obs with Dep=0	60	Total obs	134
Obs with Dep=1	74		

Tabulka 1.1: Vysvětlení volby pomocí obtížnosti

Nebudeme se příliš zabývat tím, co tento výstup znamená. Co nás alespoň orientačně zajímá, je sloupec prob. *s p-hodnotami. K určení této p-hodnoty je používán předchozí sloupec, kde můžeme nalézt hodnoty t-statistiky, ale ty jsou v tomto případě porovnávány s normálním rozdělením, proto se tento sloupec jmenuje* z-Statistic. *Tento postup je ovšem standardní, viz [7].*

Je zřejmé, že náš model nevysvětluje mnoho.

Nyní již budeme moci použít pro vysvětlení volby libovolnou veličinu. Dá se odhadnout ovšem, že některé veličiny by mohly zapříčinit multikolinearitu. Např. spokojen *s* dobrrozh *aj. Vypustíme tedy z našich úvah ty korelované veličiny, které přinášejí méně informace. Za příznak kolinearity budeme považovat to, že korelační koeficient je vyšší než 60 %.*

Navíc, jistě se budou velmi lišit výsledky pro jedince, kteří psali obtížný test, od těch, kteří psali jednoduchý. Ukazuje se, že nestačí pouze zahrnout veličinu obt *do modelu, ale je výhodné rozdělit data do dvou skupin.* $R^2_{McFadden}$ *je po rozdělení o 20% vyšší, než by byl v případě, kdybychom data nedělili. Model s interakcemi nebyl zkoumán.*

Na vybrání jedinců, kteří psali lehký test stačí do příkazového okna EViews napsat: smpl if obt=0.

Nejjednodušším způsobem, jak sestrojit binární logit model je v příkazovém okně zadat: binary(d=n) hlas c budostbod ...

Nakonec se ukázal jako nejlepší následující model (viz. tab. 1.2). Nezařadíme do něj veličinu dulez. *Sice kvůli tomu klesne* $R^2_{McFadden}$ *o 2%, jenže klesne např. Schwarzovo*

kritérium aj.

Dependent Variable: HLAS
Method: ML - Binary Probit (Quadratic hill climbing)
Date: 01/01/09 Time: 19:47
Sample: 1 134 IF OBT=0
Included observations: 71
Convergence achieved after 6 iterations
covariance matrix computed using second derivatives

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	7.172953	3.148850	2.277960	0.0227
BUDOSTBOD	-0.220749	0.109288	-2.019889	0.0434
JIST	-0.278195	0.138092	-2.014567	0.0440
MAJOSTBOD	-0.311561	0.134461	-2.317111	0.0205
MENIT	0.351199	0.106497	3.297740	0.0010
ODHOBT	-0.495054	0.193719	-2.555529	0.0106
SPOKOJ	-0.432507	0.156948	-2.755727	0.0059
VYSL	0.364291	0.126192	2.886795	0.0039

Mean dependent var	0.633803	S.D. dependent var	0.485193
S.E. of regression	0.402486	Akaike info criterion	1.113801
Sum squared resid	10.20569	Schwarz criterion	1.368751
Log likelihood	-31.53994	Hannan-Quinn criter.	1.215187
Restr. log likelihood	-46.63995	Avg. log likelihood	-0.444224
LR statistic (7 df)	30.20002	McFadden R-squared	0.323757
Probability(LR stat)	8.73E-05		

Obs with Dep=0	26	Total obs	71
Obs with Dep=1	45		

Tabulka 1.2: Vysvětlení volby pomocí vybraných veličin

Ukažme si ještě jeden nástroj, který nabízí EViews. Je to tabulka předpokládaných hodnot. Pro každé pozorování z našeho výběru dosadí EViews potřebné hodnoty do modelu. Uživatel určí mez useknutí $\in (0;1)$*. Pokud výsledná hodnota pro dané pozorování je vyšší, než mez useknutí, bude odhad závisle proměnné v modelu pro toto pozorování položen jedné. Nechme tabulku nejprve vypsat, pak k ní udělejme diskusi. Za mez useknutí* $\approx C$ *jsme dosadili 0,5.*

Na výstupu 1.3 se objevují 2 tabulky. Nám ale bude stačit pouze tato. Pro jistotu vysvětlíme některé hodnoty, které se v ní vyskytují. V prvním řádku nalezneme počty pozorování, u nichž byla hodnota závisle proměnné odhadnuta nulou. V prvním sloupci počty pozorování, u kterých hodnota závisle proměnné je skutečně nula.

Dále jsou zajímavé sloupce 5 až 7. Jsou v nich uvedeny hodnoty, jako kdybychom do modelu zahrnuli pouze konstantu. V tomto případě budou samozřejmě hodnoty odhadnuty tou hodnotou, která se ve vzorku vyskytuje častěji.

Zajímavý údaj v této tabulce je v posledním řádku a čtvrtém sloupci. Tato hodnota chce říci, jak moc je náš model zlepšením v porovnání s modelem, kde je jen konstanta. Pro jeho výpočet se vezme množství správně odhadnutých pozorování v našem modelu a odečte se od něho množství správně odhadnutých pozorování v zjednodušeném modelu.

	Estimated Equation			Constant Probability		
	Dep=0	Dep=1	Total	Dep=0	Dep=1	Total
P(Dep=1)<=C	18	6	24	0	0	0
P(Dep=1)>C	8	39	47	26	45	71
Total	26	45	71	26	45	71
Correct	18	39	57	0	45	45
% Correct	69.23	86.67	80.28	0.00	100.00	63.38
% Incorrect	30.77	13.33	19.72	100.00	0.00	36.62
Total Gain	69.23	-13.33	16.90			
Percent Ga...	69.23	NA	46.15			

Tabulka 1.3: Tabulka z EViews pomáhající určit, jak je náš model dobrý

Nakonec se toto číslo vydělí počtem špatně odhadnutých pozorování ze zjednodušeného modelu.

Takto by bylo možné udávat míru zlepšení, leč bohužel je nutné k tomuto výsledku přistupovat s rezervou. Při čtení manuálu EViews 5.1 [6, str. 613 - 615] se nepodařilo nalézt žádnou zmínku o tom, z jakého modelu jsou hodnoty regresandu odhadovány. Nejspíše je použit přímo model, který při výpočtu koeficientů bere všechna pozorování ze vzorku. Jenže pak už nelze predikci považovat za nezávislou na koeficientech.

EViews nicméně umožňuje napsat menší program. My tak učiníme. Tento program nalezneme na přiloženém CD (tam lze také nalézt stručný popis metody, kterou budeme používat). Použijeme metodu „jackknife.“ Při takovém postupu se nám podařilo odhadnout 51 pozorování korektně. Pokud v modelu použijeme jen konstantu, pak odhadneme pouze 45 pozorování správně. Tj. pokud použijeme výše zmíněnou míru zlepšení, pak náš model, oproti nejjednoduššímu možnému, zlepší situaci o 23 %.

Pokud bychom měli rozsáhlá data, bylo by vhodnější místo časově náročné „jackknife“ metody použít testovací množinu. Jenže tady by mohl být problém s výběrem pozorování určených pro testování, pokud bychom si nebyli jisti, jestli nejsou pozorování seřazena podle nějakého klíče. Kdyby např. byla seřazena podle velikosti nějaké veličiny, potom by bylo nevhodné použít jako testovací množinu první či poslední pozorování.
Z tohoto důvodu je napíšeme program, který nalezne nějaký prostý náhodný výběr a ten ohodnotí. Tento program můžeme najít na přiloženém CD. Ovšem pro naše data nemá velký smysl jej použít.

Proveďme ještě analýzu toho, jak se liší v našem případě modely logit, probit a gompit. Výpočty provedeme v EViews, ale nyní již použijeme tabulku, která se v EViews nepoužívá 1.4.

Ve sloupci směr nalezneme derivaci střední hodnoty. Srovnej s (1.4)*. Tedy*

$$\frac{\partial \mathsf{E}(y_t|\boldsymbol{x}_{t\cdot},\boldsymbol{\beta})}{\partial x_{ti}} = f(-\boldsymbol{x}_{t\cdot}\boldsymbol{\beta})\cdot\beta_i.$$

Při výpočtu derivace střední hodnoty za $\boldsymbol{x}$ bereme průměr, jak je naznačeno v posledním řádku. Je opravdu vidět, že odhad gradientu střední hodnoty u modelů logit a probit se příliš neliší. Zdá se, že při daném zaokrouhlení, jako by se odhady v absolutní hodnotě lišily o 0,02. Resp. odhady logit jsou v absolutní hodnotě o 0,02 vyšší. Toto

	lineární		probit		logit		gompit	
veličina	**koef**	**směr**	**koef**	**směr**	**koef**	**směr**	**koef**	**směr**
konst.	1,77	-	7,17	-	12,50	-	9,51	-
budostbod	-0,04	-0,04	-0,22	-0,07	-0,40	-0,09	-0,34	-0,11
jist	-0,05	-0,05	-0,28	-0,09	-0,48	-0,11	-0,35	-0,11
majostbod	-0,06	-0,06	-0,31	-0,10	-0,51	-0,12	-0,33	-0,11
menit	0,08	0,08	0,35	0,12	0,62	0,14	0,48	0,15
odhobt	-0,10	-0,10	-0,50	-0,17	-0,87	-0,20	-0,61	-0,20
spokoj	-0,10	-0,10	-0,43	-0,15	-0,75	-0,17	-0,53	-0,17
vysl	0,08	0,08	0,36	0,12	0,62	0,14	0,43	0,14
$f(-\bar{\boldsymbol{x}}^\top\hat{\boldsymbol{\beta}})$	1		0,336		0,230		0,319	

Tabulka 1.4: Odhady koeficientů a směry růstu střední hodnoty

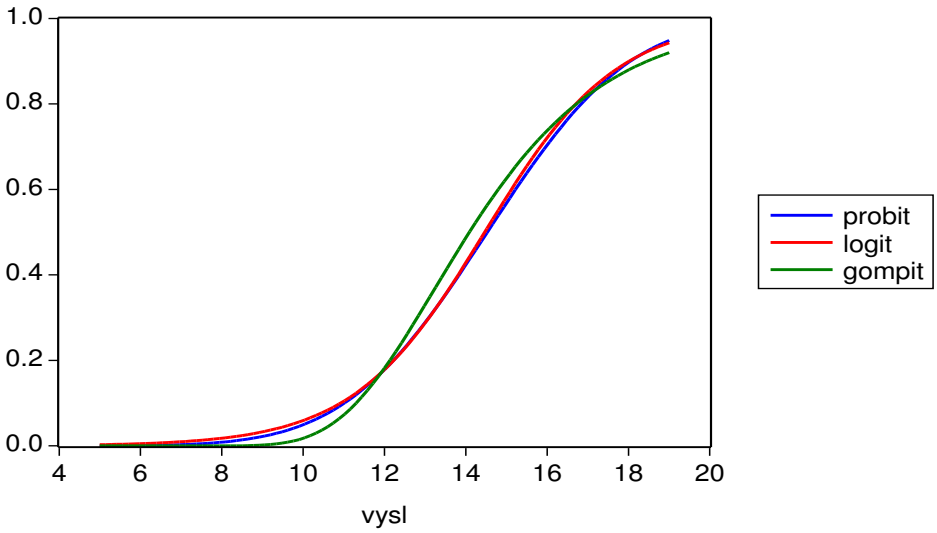
zjištění odpovídá též poznámce 1.2, neboť logit je díky tomu „citlivější“ na změnu nezávisle proměnné při pohybu od průměru. Takže odhadnutá podmíněná střední hodnota by mohla mít větší rozptyl. To odpovídá skutečnosti, že logistické rozdělení má těžší chvosty. V našem případě se ani model gompit od ostatních příliš neodlišuje.

Jak již bylo výše uvedeno, standardní prostředky EViews podobnou tabulku nevypíší, proto bylo opět třeba napsat drobný program. Na něj se můžeme podívat na přiloženém CD.

Dalším zajímavým zjištěním může být, že pokud použijeme výše zmíněnou „jackknife“ metodu, modely logit a probit odhadnou stejné množství pozorování korektně, tedy 51. Nikoli však model gompit, který odhadne správně 53 pozorování. Přičemž v jednoduchém modelu je stále pouze 45 správně odhadnutých pozorování (nezávisle na volbě modelu, prostě jen volíme tu možnost, která se vyskytne v datech častěji, takže to nemůže záviset na distribuční funkci). Takže v tomto případě dochází ke zlepšení o 31 %.

Podívejme se ještě na to, jak vypadá odhad podmíněné pravděpodobnosti $\mathsf{P}(y_t = 1|\boldsymbol{x}_{t.}, \boldsymbol{\beta}) = 1 - F(-\boldsymbol{x}_{t.}\boldsymbol{\beta})$ *za podmínek, že u všech veličin v modelu vezmeme jejich průměr 1.1. Pouze veličinu* vysl *necháme probíhat od 5 do 19, což je její minimum a maximum.*

Opět můžeme poznamenat, že gompit se od ostatních dvou modelů liší více. Jak vytvořit matici, u které v nabídce View-Graph-XY line-One X against all Y's *lze získat graf jako v 1.1, je uvedeno na přiloženém CD. Tento graf je pak možné upravit interaktivně.*



Obrázek 1.1: Odhad podmíněné pravděpodobnosti pro modely probit, logit a gompit

△

1.2 Ordinální vysvětlované proměnné

Pokud chceme zobecnit binární vysvětlovanou proměnnou, dostaneme multinomickou vysvětlovanou proměnnou. Ta může nabývat dvou a více hodnot, ale vždy jen konečně mnoha. My se budeme v tomto odstavci zabývat především ordinálními, tj. uspořádanými multinomickými proměnnými. Hodnoty těchto proměnných jsou uspořádány, tzn. lze určit jejich pořadí. Taková veličina může např. určovat v jakých letech nastala nějaká událost, nebo velikost v litrech aj. My budeme předpokládat, že máme multinomickou veličinu s prvky $1, \ldots, R$, jejíž prvky jsou setříděné.

Sestavíme model, u kterého použijeme obdobnou interpretaci jako byla použita v bodě 1 za poznámkou 1.1. Tzn. zavedeme latentní vysvětlovanou proměnnou y^*, kterou provážeme s regresory $\boldsymbol{X}$ v modelu

$$y_t^* = \boldsymbol{x}_{t\cdot}\boldsymbol{\beta} + \varepsilon_t, \tag{1.7}$$

kde ε_t jsou iid náhodné veličiny s nulovou střední hodnotou. Vztah mezi latentní a skutečnou vysvětlovanou proměnnou má tvar

$$y_t = \begin{cases} 0 & \text{pro } y_t^* \leq m_1, \\ 1 & \text{pro } m_1 < y_t^* \leq m_2, \\ 2 & \text{pro } m_2 < y_t^* \leq m_3, \\ \vdots & \\ R & \text{pro } m_R < y_t^*. \end{cases}$$

Prahy $m_1, \ldots, m_R$ jsou kromě $\beta_1, \ldots, \beta_k$ a reziduálního rozptylu dalšími neznámými parametry modelu. Dále pokračujme následovně

$$\mathsf{P}_r = \begin{cases} \mathsf{P}(y_t = 0|\boldsymbol{x}_{t\cdot}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{m}) = F(m_1 - \boldsymbol{x}_{t\cdot}\boldsymbol{\beta}), \\ \mathsf{P}(y_t = 1|\boldsymbol{x}_{t\cdot}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{m}) = F(m_2 - \boldsymbol{x}_{t\cdot}\boldsymbol{\beta}) - F(m_1 - \boldsymbol{x}_{t\cdot}\boldsymbol{\beta}), \\ \mathsf{P}(y_t = 2|\boldsymbol{x}_{t\cdot}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{m}) = F(m_3 - \boldsymbol{x}_{t\cdot}\boldsymbol{\beta}) - F(m_2 - \boldsymbol{x}_{t\cdot}\boldsymbol{\beta}), \\ \vdots \\ \mathsf{P}(y_t = R|\boldsymbol{x}_{t\cdot}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{m}) = 1 - F(m_R - \boldsymbol{x}_{t\cdot}\boldsymbol{\beta}), \end{cases} \tag{1.8}$$

kde $\mathsf{P}_r = \mathsf{P}(y_t = r|\boldsymbol{x}_{t\cdot}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{m})$ pro $r = 0, \ldots, R$ a $F(\cdot)$ je distribuční funkce reziduí v (1.7). Obdobně jako v předchozím odstavci můžeme rozlišovat modely logit, probit a gompit. To, že používáme kategorie $0, \ldots, R$, není podstatné. Označení může být libovolné. Důležité je pouze dodržet uspořádání. Tj. $y_s < y_t$ právě tehdy, když $y_s^* < y_t^*$.

Nyní použijeme vyjádření (1.8) pro následující výpočet

$$\frac{\partial \mathsf{P}_r}{\partial x_{ti}} = \frac{\partial F(m_{r+1} - \boldsymbol{x}_{t\cdot}\boldsymbol{\beta})}{\partial x_{ti}} - \frac{\partial F(m_r - \boldsymbol{x}_{t\cdot}\boldsymbol{\beta})}{\partial x_{ti}}, \qquad r = 1, \ldots, R-1.$$

Je vidět, že nemůžeme uvést žádný závěr o vlivu změny regresoru x_{ti} na pravděpodobnost P_t, např. na základě znaménka β_i. Toto můžeme učinit pouze v koncových bodech, jak se snadným výpočtem, za použití (1.8), ověří.

Odhad parametrů v námi zkoumaném modelu provedeme jako v předchozí kapitole metodou maximální věrohodnosti. Odhadujeme tedy parametry $\boldsymbol{\beta}$ a $\boldsymbol{m}$. Reziduální rozptyl musíme opět určit předem. Logaritmická věrohodnostní funkce má tvar

$$L(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{m}) = \sum_{t=1}^{T} \sum_{r=0}^{R} I_r(y_t) \cdot \ln\big(\mathsf{P}(y_t = r|\boldsymbol{x}_{t\cdot}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{m})\big), \tag{1.9}$$

kde $I_r(y_t)$ je indikátor toho, zda $y_t = r$. Jako příklad uveďme logaritmickou věrohodnostní funkci modelu logit.

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{m}) &= \sum_{t=1}^{T} I_0(y_t) \cdot \ln\left(\frac{\mathrm{e}^{m_0 - \boldsymbol{x}_{t\cdot}\boldsymbol{\beta}}}{1 + \mathrm{e}^{m_0 - \boldsymbol{x}_{t\cdot}\boldsymbol{\beta}}}\right) \\ &+ \sum_{t=1}^{T} \sum_{r=1}^{R-1} I_r(y_t) \cdot \ln\left(\frac{\mathrm{e}^{m_{r+1} - \boldsymbol{x}_{t\cdot}\boldsymbol{\beta}}}{1 + \mathrm{e}^{m_{r+1} - \boldsymbol{x}_{t\cdot}\boldsymbol{\beta}}} - \frac{\mathrm{e}^{m_r - \boldsymbol{x}_{t\cdot}\boldsymbol{\beta}}}{1 + \mathrm{e}^{m_r - \boldsymbol{x}_{t\cdot}\boldsymbol{\beta}}}\right) \\ &+ \sum_{t=1}^{T} I_R(y_t) \cdot \ln\left(1 - \frac{\mathrm{e}^{m_R - \boldsymbol{x}_{t\cdot}\boldsymbol{\beta}}}{1 + \mathrm{e}^{m_R - \boldsymbol{x}_{t\cdot}\boldsymbol{\beta}}}\right). \end{aligned}$$

Stejně jako v předchozí kapitole, můžeme náš model použít pro předpovědi a poté zkoumat jeho úspěšnost.

Příklad 1.2 *Pokračujme ve zkoumání dat z příkladu 1.1. Nyní nám samozřejmě půjde o zkoumání veličiny, která nabývá více než dvou hodnot.*

Půjde nám o veličinu spokoj. *Ze stejných důvodů jako ve výše zmíněném příkladu rozdělíme data do dvou skupin, podle toho, jaký test účastník psal. Budeme se zabývat těmi jedinci, kteří psali jednodušší variantu.*

V EViews necháme model, který má jako regresant uspořádanou multinomickou proměnnou spočítat příkazem ordered(d=n) spokoj hlas plat ... *Jedná se o model probit.*

Asi nikoho příliš nepřekvapí, že v našem modelu jsou velmi důležitými vysvětlujícími proměnnými vysl *a* plat.

Dependent Variable: SPOKOJ
Method: ML - Ordered Probit (Quadratic hill climbing)
Date: 01/01/09 Time: 19:47
Sample: 1 134 IF OBT=0
Included observations: 71
Number of ordered indicator values: 7
Convergence achieved after 6 iterations
covariance matrix computed using second derivatives

	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
BUDOSTBOD	-0.119766	0.065514	-1.828101	0.0675
BUDDOBR	0.327837	0.148520	2.207356	0.0273
HLAS	-0.862358	0.312098	-2.763102	0.0057
PLAT	0.748324	0.289464	2.585205	0.0097
VYSL	0.313404	0.074171	4.225453	0.0000
		Limit Points		
LIMIT_2:C(6)	1.072513	1.696068	0.632353	0.5272
LIMIT_3:C(7)	2.805511	1.651191	1.699084	0.0893
LIMIT_4:C(8)	3.203369	1.651495	1.939679	0.0524
LIMIT_5:C(9)	3.791485	1.659285	2.285011	0.0223
LIMIT_6:C(10)	4.217714	1.669924	2.525692	0.0115
LIMIT_7:C(11)	5.182405	1.687874	3.070375	0.0021

Akaike info criterion	2.930985	Schwarz criterion	3.281541
Log likelihood	-93.04997	Hannan-Quinn criter.	3.070390
Restr. log likelihood	-113.8691	Avg. log likelihood	-1.310563
LR statistic (5 df)	41.63819	LR index (Pseudo-R2)	0.182834
Probability(LR stat)	6.97E-08		

Tabulka 1.5: Vysvětlení spokojenosti s výsledkem pomocí vybraných veličin

Hodnoty LIMIT_2:C(6) ... *udávají hodnoty* $m_1, \ldots, m_r$ *viz např.* (1.8).

U veličin budostbod *a* buddobr *se projevila zajímavá vlastnost. Pokud jednu z nich z modelu vyjmeme, druhá se následně projeví jako nevýznamná. Tento efekt vyplývá z toho, co obě veličiny představují. To, že budu „dobrý", mě zajímá, pouze pokud se mohu srovnat s ostatními. Za zmínku také stojí, že tyto dvě veličiny nebylo vhodné nahradit poměrem* leps, *který vyjadřuje, zda si účastník myslí, že bude lepší než druzí.*

Kdybychom chtěli v EViews nalézt podobnou tabulku jako v příkladu pro binární vysvětlovanou proměnnou, která by se týkala správných odhadů, nalezli bychom tab. 1.6.

Potíž spočívá v tom, že tato tabulka vůbec nevypovídá o tom, jestli náš model dobře předpovídá. Pouze tvrdí, kolik pozorování bylo odhadnuto hodnotou k a kolik jich ve skutečnosti hodnotu k má. Kvůli tomu je v podstatě čtvrtý sloupec matoucí, protože pozorování může být odhadnuto nějakou hodnotou, ale nemusí ji mít. Tento sloupec je pouze rozdíl dvou předchozích. Není v něm zkoumáno, zda dochází ke skutečné shodě.

Value	Count	Count of obs with Max Prob	Error	Sum of all Probabilities	Error
1	1	1	0	1.056	-0.056
2	5	6	-1	4.981	0.019
3	4	0	4	3.388	0.612
4	8	1	7	7.652	0.348
5	7	0	7	7.516	-0.516
6	19	29	-10	20.011	-1.011
7	27	34	-7	26.397	0.603

Tabulka 1.6: Tabulka z EViews, která by měla vyjadřovat množství správně odhadnutých hodnot

Např. kdyby třetí pozorování mělo hodnotu 1 a žádné jiné pozorování této hodnoty nenabývalo. Náš model dejme tomu odhadne, že pozorování 5 má mít hodnotu 1 a žádné jiné pozorování již takto neodhadne. Pak je error v prvním řádku 0, ačkoli pozorování 3 je nutně odhanuto špatně. Upozorněme na to, že tento příklad není vybrán z našeho modelu. Tam je pozorování s hodnotu 1 odhadnuto správně. Ale výše popsaná chyba se zde také vyskytuje. Bylo by ovšem komplikovanější na ní ukázat princip.

Podívejme se tedy raději opět na metodu „jackknife" (program viz přiložené CD stejně jako ostatní programy zmíněné v tomto příkladu). Pokud použijeme všech 71 pozorování (tedy ta ze vzorku, pro která je obt=0) nebude možné použít model gompit. Když vyloučíme sto třicáté pozorování, abychom je mohli odhadnout, dostaneme tuto chybovou hlášku: Non positive likelihood function for observation *72. Jde zřejmě o to, že věrohodnostní funkce pro dané koeficienty je při odhadu příliš blízká nule (podrobnější vysvětlení v nápovědě ani v manuálu nelze dohledat). Toto by mohlo znamenat, že pozorování 72 je odlehlé. Tímto způsobem je také možné zkoumat odlehlá pozorování obecně.*

Takže metodu „jackknife" pro tento vzorek a model gompit nelze použít. Pro logit je správných odhadů 28, přičemž nejčastější hodnota veličiny spokoj *se ve vzorku vyskytne 27 krát. Tedy od strategie, kde bychom vybírali pouze nejčastější hodnotu, nejde o veliké zlepšení. Model logit dopadne ještě hůře. V tomto případě odhadneme správně jen 27 pozorování.*

Pokud ovšem z našeho vzorku vyřadíme 72 pozorování, dostaneme jiné výsledky. Pro modely probit a gompit je správně určeno 30 pozorování. Jedná se o zlepšení proti nejjednodušší strategii o 7 %. Ale pro logit ke zlepšení nedošlo a správně je pouze 27 pozorování.

Pokusme se nalézt další ukazatel, který by nám mohl pomoci při určování vhodnosti modelu. V prvé řadě je dobré si připomenout, že použitá metoda nedokáže odlišit rozdíl mezi tím, zda se dvě sousední hodnoty liší o 1, nebo o 100. Tedy nezáleží na tom, pokud má ordinální veličina 3 hodnoty, jestli to jsou hodnoty 1, 2 a 3, nebo -5, 0 a 100. Toto je způsobeno tvarem funkce, kterou minimalizujeme, tedy logaritmickou věrohodnostní fcí viz (1.9)*. Žádná hodnota vysvětlované proměnné se zde nevyskytuje.*

Abychom vystihli toto chování modelu, budeme počítat následující statistiku

$$\sum_{t=1}^{T} |i_t - \hat{i_t}|, \tag{1.10}$$

kde i_t vyjadřuje kolikátou hodnotu pozorování t má. Tedy pokud závisle proměnná nabývá hodnot -5, 0 a 11 a jestliže $y_t = 0$, pak $i_t = 2$. Přitom $\hat{i_t}$ je odhad i_t za pomoci použitého modelu.

Potíž této statistiky spočívá v tom, že pokud bude model odhadovat více pozorování prostřední hodnotou, nejspíš vyjde nižší, tedy lepší. Proto také používáme absolutní hodnotu místo druhé mocniny, která by tuto okolnost ještě více podtrhla.

Samozřejmě by v jistých případech mohlo být také výhodné použít $\sum_{i=1}^{T} |y_t - \hat{y_t}|$. Přitom vzdálenosti mezi hodnotami vysvětlované proměnné by byly voleny tak, aby vystihovaly skutečný odstup mezi hodnotami. Např. by byla kategorie lehké zranění, což by mělo hodnotu 1, střední zranění s hodnotou 2 a zranění s následkem smrti s hodnotou 20. Pokud by někdo chtěl použít výše zmíněnou statistiku jako vedlejší kritérium pro výběr modelu, zřejmě by taková statistika preferovala modely, které nedělají chybu v zařazování do třetí skupiny, ale už by tolik nezáleželo na tom, jestli tento model zařadí člověka do skupiny lehké nebo střední zranění.

V našem případě ovšem není podstatné, zda použijeme tuto statistiku nebo (1.10)*, poněvadž hodnoty vysvětlované proměnné mají od sebe vzdálenost 1.*

Kdybychom měli hodnotu, která je v celých datech jen jedna (a my takovou máme), pak ji, po jejím vyloučení, model není schopen odhadnout. V tomto případě ale stejně vybereme hodnotu, která má nejvyšší pravděpodobnost, i když je nutně jiná, než ta, kterou odhadujeme.

V případě nejjednodušší strategie má tato statistika hodnotu 102. Pro model probit 71, logit 68 a gompit 71. Je vidět, že ač model logit se nejméně často trefí do správného pozorování, jeho odhady jsou vzdáleny nejméně od skutečných hodnot (ve smyslu dříve zmíněné statistiky). Toto může být způsobeno tím, že vysoké hodnoty 6 a 7 se ve vzorku vyskytují nejčastěji, takže modely, které často tyto hodnoty odhadují, se „trefují“ častěji. Nicméně se častěji mýlí u pozorování s nízkými hodnotami, než model jehož hodnoty jsou více ve středu (v našem případě logit).

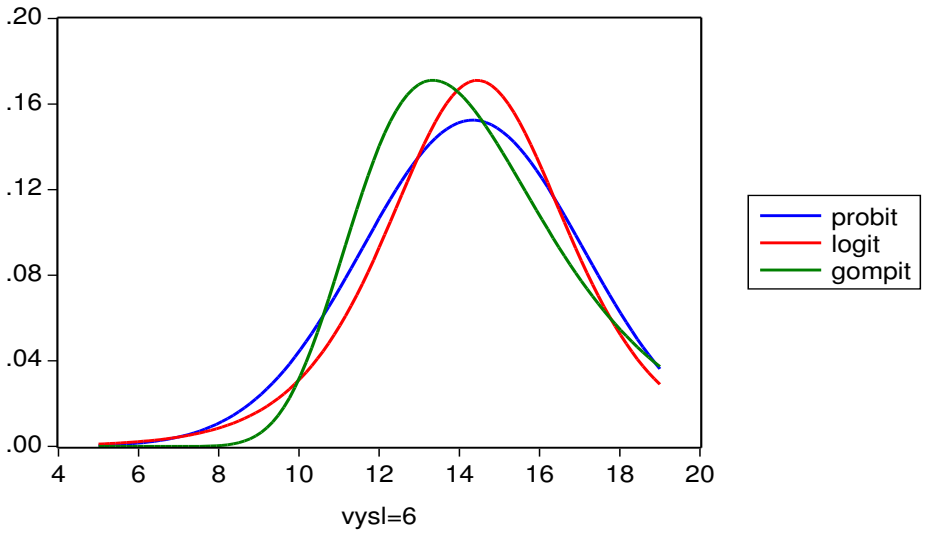
Nyní se podívejme na to, jak vypadá graf odhadu podmíněných pravděpodobností pro modely probit, logit a gompit 1.2. Kromě veličiny vysl *bereme jako hodnotu všech ostatních veličin průměr. U veličiny* vysl *dosazujeme 101 hodnot od minima po maximum a vzdálenosti bereme jako ekvidistantní. Samozřejmě, pokud bychom nebrali průměry, ale jinou hodnotu u ostatních veličin, dostali bychom grafy odlišné.*

Vidíme, že v tomto případě odhadované pravděpodobnosti nenabývají ani 0.2, což je dáno právě také tím, že od většiny veličin bereme pouze průměr.

Také si z obrázku můžeme všimnout, že se model gompit opět trochu více odlišuje od ostatních dvou. Nicméně v tomto případě kupodivu dávají modely probit a gompit srovnatelnější výsledky než logit. Ovšem, jestliže se podíváme na odhady, které udělají jednotlivé modely (v našem modelu odhad_v*), zjistíme, že ne nutně se odhady v modelech gompit a probit liší více od odhadů v modelu logitu.*

Grafy pro ostatní hodnoty vypadají obdobně.

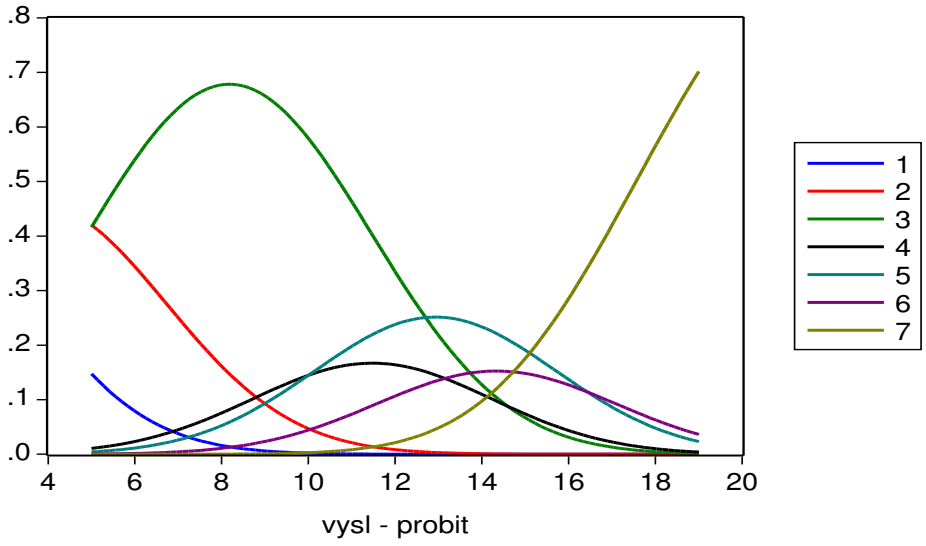
Ještě si ukažme graf podmíněných pravděpodobností pro všechny hodnoty. Budeme uvažovat model probit 1.3.



Obrázek 1.2: Odhad podmíněné pravděpodobnosti pro modely probit, logit a gompit

Z obrázku se zdá, jako kdyby náš model odhadoval pouze hodnoty 3, 5 a 7. To ovšem není pravda. My opět necháváme všechny ostatní veličiny, kromě vysl *nabývat pouze své průměrné hodnoty. Kdyby nabývaly hodnoty jiné, jistě by i podmíněné pravděpodobnosti vypadaly jinak.*

Také je dobré poznamenat, že medián je 17. Takže, i když v grafu by nejvíce hodnot veličiny vysl *bylo odhadnuto trojkou, nejvíce pozorování bude odhadnuto sedmičkou, jelikož tam se nachází většina pozorování.* △



Obrázek 1.3: Odhad podmíněných pravděpodobností pro všechny hodnoty veličiny vysl u modelu probit

Kapitola 2

Omezené vysvětlované proměnné

V této kapitole budeme pracovat s modelem

$$y_t^* = \boldsymbol{x}_t.\boldsymbol{\beta} + \sigma \cdot \varepsilon_t, \tag{2.1}$$

kde y^* bude latentní vysvětlovaná proměnná, kterou budeme mít možnost pozorovat skrz nějakou jinou proměnnou y.

Zaměříme se pouze na cenzorované proměnné, které budeme potřebovat v příkladu. Poté na veličiny vyjadřující dobu trvání.

Pokud by se čtenář zajímal o teoretický rámec problematiky, můžeme doporučit knihu [10] (ta je vhodná i pro diskrétní vysvětlované proměnné).

2.1 Cenzorované veličiny

U cenzorované veličiny můžeme pozorovat hodnoty pouze z nějakého intervalu. Pokud by měla nabýt hodnotu mimo tento interval, tak bychom dostali okrajové hodnoty intervalu.

Zapišme toto formálně.

Definice 2.1 (Cenzorovaná veličina) *Mějme spojitou latentní veličinu y^*. My ovšem pozorujeme pouze veličinu y. Dále mějme meze $d_t < h_t$ pro každé pozorování t. Pak cenzorovanou veličinou nazveme veličinu, která se chová následovně*

$$y_t = \begin{cases} d_t & pro\ y_t^* \leq d_t, \\ y_t & pro\ d_t < y_t^* \leq h_t \\ h_t & pro\ h_t \geq y_t^*. \end{cases}$$

Velmi často platí $d_t = d$ a $h_t = h$ pro všechna $t \in T$. Pak označíme meze jen d a h.

Pokud $d = -\infty$ říkáme, že neprovádíme cenzorování zleva. Pokud $h = \infty$ neprovádíme cenzorování zprava.

Jde tedy o to, že pozorování, která leží mimo jistou mez, jsou v datech reprezentována touto mezí.

Lze namítnout, jestli by nebylo lepší takováto pozorování úplně ze vzorku vyloučit, jenže tím bychom ztratili velkou část informace.

S takovýmto druhem veličin se můžeme setkat v případech, kdy jsou z nějakého důvodu příliš velké hodnoty nepublikovatelné, např. vnitřní předpisy nějaké organizace mohou zakazovat zveřejnění platů nad určitou mezí.

Nebo pokud náš přístroj, kterým měříme nějakou fyzikální veličinu, má vymezený rozsah a pozorování za hranicí tohoto rozsahu ohodnotí hraniční hodnotou.

Můžeme si položit otázku, kdy cenzorování nastává a kdy ne. Uvažujme např. veličinu, která měří vzdálenost. Je sice pravda, že bychom si mohli říci, že $d = 0$ a $h = \infty$, jenže takovýto postup by nebyl příliš přirozený. Rozumnější je předpokládat, že takováto veličina má hustotu, jež je nulová pro záporná čísla.

Na druhou stranu v knize [4] je uveden příklad. Nějaký fond nabídne klientům nový investiční produkt. Zajímavá je samozřejmě výše investice, kterou jednotliví klienti uskuteční. Samozřejmě většina klientů vůbec neinvestuje. V tuto chvíli by ovšem záporná investice mohla mít rozumnou interpretaci, proto je možné v tomto případě cenzorovanou proměnnou použít.

Důležitý případ nastane, když $d = 0, h = \infty$, pak je vysvětlovaná proměnná nezáporná. Pokud je v tomto případě navíc reziduální složka normálně rozdělena, mluvíme o *modelu tobit.* Viz [13].

Odhad parametrů σ a $\boldsymbol{\beta}$ se provede metodou maximální věrohodnosti. Provádí se tedy maximalizací logaritmické věrohodnostní funkce tvaru

$$\begin{aligned} l(\boldsymbol{\beta}, \sigma) \;=\; & \sum_{i=1}^{T} \left\{ I_{(-\infty, d_t\rangle}(y_t) \cdot \ln F\left(\frac{d_t - \boldsymbol{x}_{t\cdot}\boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) + \right. \\ & I_{(d_t, h_t)}(y_t) \cdot \ln f\left(\frac{y_t - \boldsymbol{x}_{t\cdot}\boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) - I_{(d_t, h_t)}(y_t) \cdot \ln(\sigma) \\ & \left. I_{\langle h_t, \infty)}(y_t) \cdot \ln\left(1 - F\left(\frac{h_t - \boldsymbol{x}_{t\cdot}\boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right)\right) \right\}, \end{aligned}$$

kde f a F jsou jako obvykle hustota a distribuční funkce daného rozdělení.

2.2 Proměnné vyjadřující dobu trvání

Stručný náhled do této problematiky najdeme například v práci [11] a nebo [12]. Zajímavá je skutečnost, že většina knih popisujících tuto problematiku má medicínskou tématiku nebo se zabývá teorií spolehlivosti. Užitečným zdrojem informací může být také článek [5]. Stručnou zmínku také můžeme nalézt v [4, str. 182-184], či [7, 791-801].

Jde tedy především o to, že vysvětlovaná proměnná vyjadřuje čas. Zkoumáme, kdy dojde k nějaké události. Odtud také pochází jméno, které se používá pro tento druh analýz, tím je *analýza přežití (survival analysis).* V tomto případě se zkoumá, za jak dlouho daný jedinec zemře. Samozřejmě lze také zkoumat dobu, kdy nějaký předmět přestane sloužit (rozbije se stroj, praskne žárovka).

Jistě lze takto zkoumat problémy, u kterých pouze předpokládáme, že musí jednou skončit. Typickým příkladem může být čas do chvíle, kdy klient přestane splácet úvěr. Nicméně může to také být doba, po kterou je nějaký jedinec nezaměstnán nebo čas do prodeje nějakého výrobku.

Z výše uvedených příkladů vyplývá, že se může často stát, že dostaneme data, která jsou shora cenzorována. Tedy dostaneme pozorování, u kterých daný jev ještě nenastal. Samozřejmě můžeme taková data ze vzorku vyloučit, ale to by třeba právě u klientů banky, u kterých zkoumáme, kdy přestanou splácet úvěr, byla příliš velká ztráta informace (lze předpokládat, že většina dlužníků svůj dluh splatí).

Nyní se zaměřme na teoretický rámec. Především zkoumáme *funkci přežití (survival function)*, která říká, jaká je pravděpodobnost toho, že dané pozorování překročí nějaký čas. Mějme pozorování času $y_1, \ldots, y_T$. Tato pozorování nechť jsou iid s hustotou f a distribuční funkcí F. Pak funkci přežití definujeme jako

$$S(\tau) = \mathsf{P}(y_t > \tau) = 1 - F(\tau).$$

Další používanou charakteristikou je *intenzita úmrtnosti (hazard rate, mortality rate)*. Tato veličina vyjadřuje změnu podmíněné pravděpodobnosti toho, že jev nastane při malé změně času. Zapíšeme ji tedy takto

$$\lambda(\tau) = \lim_{\delta \to 0^+} \frac{\mathsf{P}(\tau < y_t \leq \tau + \delta | y_t > \tau)}{\delta}.$$

Touto funkcí je již jednoznačně určeno rozdělení, neboť existuje jednoznačný vztah mezi ní a hustotou. Platí totiž vztahy

$$\lambda(\tau) = \lim_{\delta \to 0^+} \frac{F(\tau + \delta) - F(\tau)}{\delta} \frac{1}{S(\tau)} = \frac{f(\tau)}{S(\tau)} = -\frac{\partial \log S(\tau)}{\partial \tau}. \tag{2.2}$$

Další vztah, který lze v tomto kontextu použít jako argument, je

$$S(\tau) = \exp\left[-\int_0^\tau \lambda(s)\, ds\right]. \tag{2.3}$$

Nyní se podíváme, jak použít teorii k cenzorovaným proměnným v našem případě. Budeme odhadovat parametry metodou maximální věrohodnosti a budeme vycházet z (2.2). Nicméně, aby zápis byl úspornější, budeme pracovat místo s logaritmickou věrohodnostní funkcí s věrohodnostní funkcí samotnou. K dalším výpočtům použijeme vztahy (2.2) a (2.3). Případ $c_t = 0$ znamená, že je pozorování t cenzorováno. Pokud $c_t = 1$, pak není. V případě cenzorování je horní mezí $h_t = y_t$. Budeme tedy ve vzorku používat latentní vysvětlovanou proměnnou y_t^*, která není cenzorována a tedy představuje vždy skutečnou dobu do dané události.

Pro ujasnění situace: v tuto chvíli máme veličinu, která je cenzorována zprava a nabývá pouze kladných hodnot (zleva cenzorována není). Věrohodnostní funkce má tvar

$$\begin{aligned} L &= \prod_{t=1}^{T} f(y_t^*)^{c_t} \mathsf{P}(y_t^* > h_t)^{1-c_t} = \prod_{t=1}^{T} f(y_t^*)^{c_t} (1 - F(h_t))^{1-c_t} \\ &= \prod_{t=1}^{T} \lambda(y_t)^{c_t} (1 - F(h_t)) = \prod_{t=1}^{T} \lambda(y_t)^{c_t} \exp\left[-\int_0^{h_t} \lambda(u)\, du\right]. \end{aligned}$$

Ještě jsme ovšem nepoužili exogenní veličiny. Obecně budeme předpokládat vztah

$$\ln(y_t) = \boldsymbol{x}_{t\cdot}\boldsymbol{\beta} + \sigma\varepsilon_t. \tag{2.4}$$

Jakobian při transformaci z ε_t na $\ln(y_t)$ je $\frac{\partial \varepsilon_t}{\partial \ln(y_t)} = \frac{1}{\sigma}$. Takže hustotu budeme psát ve tvaru

$$f(\ln(y_t)|\boldsymbol{x}_{t\cdot}, \boldsymbol{\beta}, \sigma) = \frac{1}{\sigma} f\left(\frac{\ln(y_t) - \boldsymbol{x}_{t\cdot}\boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right)$$

a funkci přežití ve tvaru

$$S(\ln(y_t)|\boldsymbol{x}_{t\cdot}, \boldsymbol{\beta}, \sigma) = S\left(\frac{\ln(y_t) - \boldsymbol{x}_{t\cdot}\boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right).$$

Tyto funkce pak budeme dosazovat do modelů, kde používáme různé hustoty. Příklady takových modelů nyní uvedeme. Budeme předpokládat $\tau > 0$.

1. *Exponenciální model* doby trvání má intenzitu úmrtnosti

   $$\lambda(\tau) = \gamma,$$

   která odpovídá hustotě ve tvaru $f(\tau) = \gamma \exp(-\gamma\tau)$, $\gamma > 0$.

2. Velmi častý je *Weibullův model* s intenzitou

   $$\lambda(\tau) = \alpha\gamma\tau^{\alpha-1}.$$

   Jeho hustotu zapíšeme ve tvaru $f(\tau) = \alpha\gamma\tau^{\alpha-1}\exp(-\gamma\tau^{\alpha})$. Pokud položíme $\alpha := 1$, pak dostaneme exponenciální model.

3. *Logaritmicko-normální model*

   $$\lambda(\tau) = \phi\left(\frac{\ln\tau}{\sigma}\right) \Big/ \sigma\tau\left(1 - \Phi\left(\frac{\ln\tau}{\sigma}\right)\right).$$

   Veličina $\ln(y_t)$ má normální rozdělení s parametry μ a σ^2.

4. *Model s proporcionální intenzitou úmrtnosti,* resp. *Coxův model*

   $$\lambda_t(\tau) = \lambda_0(\tau)\exp(\boldsymbol{x}_{t\cdot}\boldsymbol{\beta}),$$

   kde $\lambda_0(\tau)$ je *bazická intenzita úmrtnosti (baseline hazard function).* Tato intenzita nezávisí na čase t a často se normuje tak, abychom nemuseli používat intercept v $\boldsymbol{x}_{t\cdot}\boldsymbol{\beta}$.

   Je také zajímavé, že pokud vezmeme poměr intenzit úmrtnosti pro dvě pozorování, pak je tento poměr nezávislý na bazické intenzitě úmrtnosti

   $$\frac{\lambda_{t_1}(\tau)}{\lambda_{t_2}(\tau)} = \frac{\exp(\boldsymbol{x}_{t_1\cdot}\boldsymbol{\beta})}{\exp(\boldsymbol{x}_{t_2\cdot}\boldsymbol{\beta})}.$$

   Funkce přežití Coxova modelu má tvar

   $$S_t(\tau) = S_0(\tau)^{\exp(\boldsymbol{x}_{t\cdot}\boldsymbol{\beta})}.$$

Pokud předchozí model rozšíříme tak, že i regresory budou závislé na čase dostaneme obecnější Coxův model

$$\lambda_t(\tau) = \lambda_0(\tau) \exp(\boldsymbol{x}_{t\cdot}(\tau)\boldsymbol{\beta}).$$

Bazická intenzita úmrtnosti a parametry $\boldsymbol{\beta}$ se odhadnou metodou maximální věrohodnosti. Při odhadu se využívá právě vlastnosti, že podíl dvou intenzit úmrtnosti je nezávislý na bazické intenzitě úmrtnosti. Tato metoda je, narozdíl od předchozích parametrických metod, semiparametrická. Bazická intenzita úmrtnosti se totiž odhaduje neparametricky.

Srovnejme nyní Weibullův a Coxův model. Vyjmenujeme rozdíly v použití:

1. Coxův model lze použít ve větším množství případů.
2. Jestliže můžeme aplikovat Weibullův model, pak lze aplikovat i Coxův.
3. Pokud lze aplikovat oba modely, potom Coxův je méně vhodný, neboť mu odpovídá menší síla testů.

Empirické potvrzení těchto informací lze nalézt v [14].

Kromě výše zmíněných metod se používají i metody neparametrické. K těmto metodám patří především Kaplan-Meierův odhad [9], nebo jeho zobecnění Nelson-Aalenův odhad [1].

Příklad 2.1 *V EViews nejsou metody pro odhad doby trvání vůbec implementovány. Lze zde ale pracovat s cenzorovanými veličinami. Bohužel pouze pokud předpokládáme normální, logistické, či extremální rozdělení typu I.*

Takže bude rozumnější zvolit jiný software. Pro tuto analýzu si vybereme volně dostupný program R. Předem uvedeme, že nápověda ke knihovně obsahující procedury k analýze přežití je v R poněkud matoucí. Není zde naprosto přesně popsáno, co se vlastně odhaduje. K tomu, že se odhady, které budou ukázány, shodují s tím, co je uvedeno v této kapitole, nás mohou vést pouze následující okolnosti: diskuse na internetu psané lidmi, kteří balíček užívají a simulace.

Nejprve popíšeme data. Poděkujme firmě Penco, která data zapůjčila.

Data se týkají potravinových výrobků, které slouží především pro sportovce. Jde o doplňky, které mají různé charakteristiky, jako zvýšení výkonu, hubnutí, či přísun vitamínů a minerálů. Charakteristiky výrobků budou stručně popsány v části, kde popisujeme veličiny.

My pro naši analýzu budeme předpokládat, že každý výrobek v určité chvíli přestane být prodejný. V tomto okamžiku bude stažen z výroby. Budeme při daných charakteristikách zkoumat, za jakou dobu k tomuto okamžiku dojde.

Zmiňme také, že data byla z původní podoby (poskytnuté firmou Penco) upravena v programu Gawk, neboť nebyla ve vhodné podobě pro pozdější analýzu. V následující analýze budeme pracovat již pouze s upravenými daty. Lze je najít na přiloženém CD.

Celkem máme 52 pozorování. Pozorování je cenzorováno, pokud se výrobek nepřestal prodávat. Cenzorovaných pozorování je 35.

Název	*Popis*	*Hodnoty*
hmot	*Hmotnost výrobku v gramech.*	$\mathbb{Z}$
prasek	*Má-li výrobek formu prášku (1=prášek).*	*0, 1*
tobol	*Je-li výrobek balen v tobolkách (1=tobolka).*	*0, 1*
tyc	*Jde-li o tyčinku (1=ano).*	*0, 1*
gel	*Má-li výrobek formu gelu (1=gel).*	*0, 1*
tekut	*Má-li výrobek tekutou formu (1=ano).*	*0, 1*
nakl	*Náklady na výrobu v korunách.*	$\mathbb{R}^+$
cena	*Prodejní cena v korunách.*	$\mathbb{R}^+$
cukr	*Je-li ve výrobku přítomna glukóza (1=ano).*	*0, 1*
umel	*Jsou-li ve výrobku umělá sladidla (1=ano).*	*0, 1*
vitam	*Výrobek slouží jako zdroj vitamínů (1=ano).*	*0, 1*
miner	*Výrobek slouží jako zdroj minerálů (1=ano).*	*0, 1*
energ	*Zdroj energie (1=ano).*	*0, 1*
vykon	*Zvýšení výkonu (1=ano).*	*0, 1*
snizhm	*Výrobek pomáhá při snižování hmotnosti (1=ano).*	*0, 1*
kloub	*Kloubní přípravek (1=ano).*	*0, 1*
fci	*Kolik funkcí má přípravek.*	*1, 2, 3*
karton	*Zda je výrobek prodáván v kartonové válcové krabici (1=ano).*	*0, 1*
plast	*Je-li výrobek balen v plastu (1=ano).*	*0, 1*
folie	*Výrobek má obal z folie (1=ano).*	*0, 1*
let	*Kolik let se výrobek prodává, či prodával.*	$\mathbb{Z}$
cens	*Zda se výrobek stále prodává (1=ano).*	*0, 1*

Zde jsme uvedli všechny veličiny, ale my nebudeme používat veličiny tekut, fci *a* folie. *Tyto veličiny je možné získat z ostatních lineárními kombinacemi.*

Ještě jednou upřesněme cíl naší analýzy. Chceme odhadnout počet let, která se bude výrobek prodávat. Používáme všechna pozorování, tedy i ta, kdy se výrobek stále prodává. Ovšem pokud se stále prodává, považujeme hodnotu počtu let *v prodeji za cenzorovanou.*

Abychom mohli provést analýzu v R, museli jsme nainstalovat některé knihovny: `survival`, `Hmisc` *a* `Design`. *Je také nutné mít nainstalovanou knihovnu* `splines`.

Knihovny zavoláme příkazem např. `librari(survival)`. *Samozřejmě načteme všechny výše zmíněné knihovny.*

Data zavoláme příkazem `data=read.table("penco_prepis.txt", header = TRUE)`.

Abychom mohli všechny veličiny obsažené v datech volat přímo, použijeme příkaz `attach(data)`.

Ještě je třeba změnit veličinu cens, *neboť R přiřazuje 0, pokud je cenzorováno* `cens=abs(cens-1)`.

Nyní se podíváme na výsledky modelů, které popisujeme v teoretické části a budeme je zkoumat ve stejném pořadí. Do modelů zahrneme pouze veličiny, kdy je p-hodnota menší než 5 %.

Začněme tedy exponenciálním modelem. Pro výstup, který bude následovat použijeme příkaz `summary(survreg( Surv(let, cens) ~ tobol + gel + nakl + cena`

```
+ cukr + vitam + energ + kloub, dist= "exponential")).
```

Použijeme výstup, který se shoduje s výstupem v R.

```
               Value Std. Error      z        p
(Intercept)  2.32456    0.52459  4.431 9.37e-06
tobol        0.94926    1.20091  0.790 4.29e-01
gel         10.32056    0.00000    Inf 0.00e+00
nakl         0.01303    0.01184  1.101 2.71e-01
cena        -0.00345    0.00413 -0.836 4.03e-01
cukr         1.67497    0.87393  1.917 5.53e-02
vitam       -1.55552    0.86748 -1.793 7.29e-02
energ        0.56776    0.80816  0.703 4.82e-01
kloub        7.35734    0.00000    Inf 0.00e+00

Scale fixed at 1

Exponential distribution
Loglik(model)= -66.4   Loglik(intercept only)= -73.1
        Chisq= 13.45 on 8 degrees of freedom, p= 0.097
Number of Newton-Raphson Iterations: 11
n= 52
```

Je vidět, že model jako celek zamítáme na hladině 5 %. Nicméně, při použití exponenciálního rozdělení, lze do modelu zahrnout méně veličin než činíme, a potom získáme p-hodnotu menší.

Nyní se podívejme na Weibullův model, který dává dobré výsledky. Podezřelé ovšem je, že téměř všechny veličiny je vhodné použít.

Voláme jej příkazem `summary(survreg( Surv(let, cens)~ prasek + tobol + tyc + gel + nakl + cena + cukr + umel + vitam + miner + energ + vykon + snizhm + kloub , dist="weibull")`

```
               Value Std. Error     z        p
(Intercept)  1.62493    0.56435  2.88 3.99e-03
prasek       0.99427    0.24727  4.02 5.80e-05
tobol        2.32739    0.41496  5.61 2.04e-08
tyc          0.60118    0.37171  1.62 1.06e-01
gel          4.54943    0.00000   Inf 0.00e+00
nakl         0.00619    0.00394  1.57 1.16e-01
cena        -0.00184    0.00137 -1.34 1.80e-01
cukr         1.38173    0.19608  7.05 1.83e-12
umel         1.49531    0.27860  5.37 8.00e-08
vitam       -1.43975    0.43334 -3.32 8.92e-04
miner       -1.25068    0.38202 -3.27 1.06e-03
energ        1.38081    0.38873  3.55 3.82e-04
vykon       -1.38375    0.58899 -2.35 1.88e-02
snizhm      -1.40835    0.63390 -2.22 2.63e-02
kloub        1.42213    0.00000   Inf 0.00e+00
```

```
Log(scale)  -1.60144    0.21870 -7.32 2.44e-13

Scale= 0.202

Weibull distribution
Loglik(model)= -48.1   Loglik(intercept only)= -67.2
        Chisq= 38.2 on 14 degrees of freedom, p= 0.00048
Number of Newton-Raphson Iterations: 16
n= 52
```

Označíme-li s hodnotu `Scale` *z tabulky výše, potom* $\alpha = \frac{1}{s}$*, kde* α *je parametr Weibullova rozdělení, viz výše.*

Z modelu je patrné, že by bylo nevhodné vypustit parametr Scale, tedy α*. Z toho plyne, že užití exponenciálního modelu by bylo v tomto případě nevhodné.*

Připomeňme vztah (2.4)*. Koeficienty* $\boldsymbol{\beta}$ *zde jsou právě v tomto smyslu. Tedy* $\boldsymbol{x}_t.\boldsymbol{\beta}$ *odhaduje* $\ln(y_t)$*.*

Pokud vezmeme veličinu gel *nebo* kloub*, pak ty pokud nabudou hodnoty 1, je dané pozorování vždy cenzorované. Toto způsobilo, že na výstupu je p-hodnota rovna nule.*

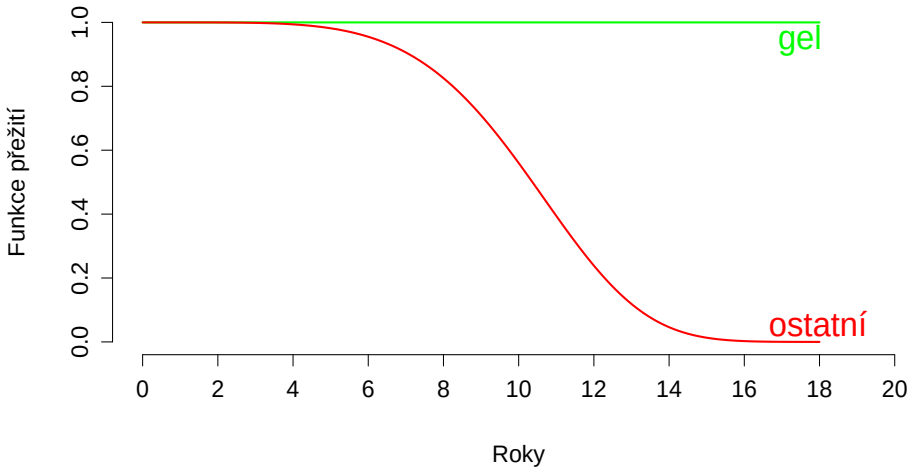
Pro veličinu gel *necháme vykreslit funkci přežití. Resp. pokud veličina* gel *nabývá hodnoty 1, znázorníme funkci přežití zelenou barvou. Pokud nula použijeme červenou. Ostatní veličiny budou nabývat svých průměrů 2.1.*

Tento obrázek získáme posloupností následujících příkazů.

```
gl=factor(gel,levels=c(1,0),labels=c("gel","ostatní"))
dd <- datadist(let, gl)
options(datadist='dd')
fit=psm(Surv(let, cens)$\sim$prasek + tobol + tyc + gl + nakl +
cena + cukr + umel + vitam + miner + energ + vykon + snizhm +
kloub, dist="weibull")
postscript('weibull_prez_gel.eps',width=10,height=6,onefile=
TRUE, paper='special',encoding="CP1250",horizontal=FALSE)
par(cex=1.4)
survplot(fit, gl=NA, prasek=mean(prasek), obol=mean(tobol),
tyc=mean(tyc), nakl=mean(nakl), cena=mean(cena),
cukr=mean(cukr), umel=mean(umel), vitam=mean(vitam),
miner=mean(miner), energ=mean(energ), vykon=mean(vykon),
snizhm=mean(snizhm), kloub=mean(kloub), xlab="Roky",
lab="Funkce přežití", col=c("green","red"),
lty=c(1,1),lwd=c(2,2))
dev.off()
```

Pokud bychom chtěli nechat vykreslit intenzitu úmrtnosti, museli bychom do `survplot(...)` *přidat na konec* `what="hazard"`*.*

U logaritmicko-normálního modelu nebudeme uvádět výstup, protože není příliš zajímavý. Postupovali jsme jako v předchozích případech. Ve srovnání s Weibullovým modelem byl tento horší. Pro zajímavost uveďme veličiny, které se v tomto modelu vyskytly: prasek*,* tobol*,* tyc*,* gel*,* nakl*,* cena*,* cukr*,* umel*,* vitam*,* miner*,* energ*,* vykon*,* snizhm *a* kloub*.*



Obrázek 2.1: Funkce přežití pro gel=1 a pro gel=0 (Weibullův model).

K tomu, abychom použili logaritmicko-normální model, stačí v proceduře `survreg(...)` *napsat* `,dist="lognormal"`. *Samozřejmě je třeba změnit veličiny.*

Poslední model, který budeme zkoumat, je model Coxův. Zavoláme jej příkazem `summary(coxph(Surv(let, cens)~prasek + tobol))`.

Problém spočívá v tom, že musíme vyřadit veličiny, které nenabývají jedničky v necenzorované podobě. Tzn. veličiny gel *a* kloub. *Možná i proto je tento model daleko chudší než třeba Weibullův.*

Uveďme část tohoto výstupu.

```
        coef exp(coef) se(coef)     z      p
prasek -2.08    0.1247    0.782 -2.66 0.0078
tobol  -3.18    0.0414    1.222 -2.61 0.0092


Likelihood ratio test= 10.5  on 2 df,   p=0.00525
Wald test            = 9.17  on 2 df,   p=0.0102
Score (logrank) test = 11.5  on 2 df,   p=0.00320
```

Veličiny v tomto modelu jsou podmnožinou těch z Weibullova. Oba modely ale byly konstruovány ze všech veličin.

Uveďme neparametrický odhad pro bazickou intenzitu úmrtnosti. Pokud tento odhad voláme, pak místo `summary` *v předchozím příkazu zadáme* `basehaz`. *Nakonec musíme přidat ještě příkaz* `centered=FALSE`.

Uveďme výstup:

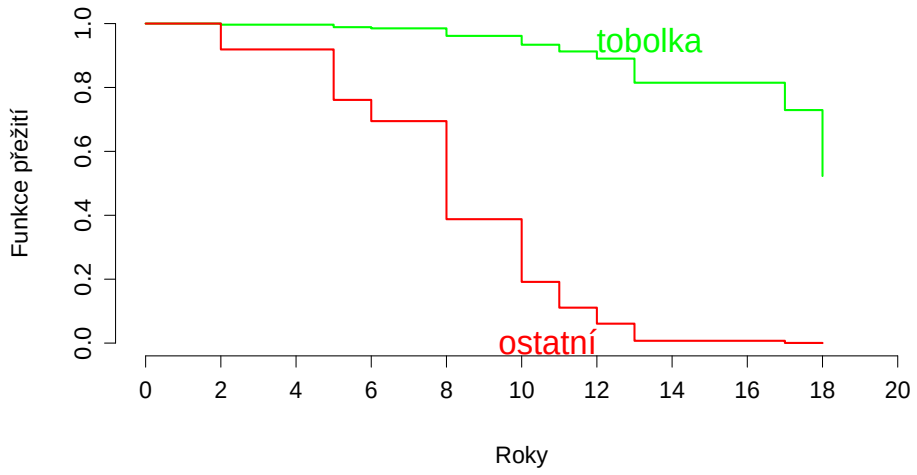
```
1    0.0844254     2
2    0.2730002     5
3    0.3643189     6
```

```
4    0.9473886    8
5    1.6527603   10
6    2.1996351   11
7    2.8011714   12
8    4.9354745   13
9    7.6081187   17
10  15.6260515   18
```

Nakonec si ukažme ještě funkci přežití v Coxově modelu, pokud veličina prasek *nabývá svého průměru a veličina* tobol *hodnot jedna a nula.*

Ještě uvedeme posloupnost příkazů, kterými tento obrázek v R vytvoříme.

```
tbl=factor(tobol,levels=c(1,0),labels=c("tobolka","ostatní"))
dd <- datadist(let, tbl)
options(datadist='dd')
fit=cph(Surv(let, cens)$\sim$prasek + tbl,surv=TRUE)
postscript('cox_prez_tob.eps',width=10,height=6,onefile=TRUE,
paper='special',encoding="CP1250",horizontal=FALSE)
par(cex=1.4)
survplot(fit,tbl=NA,prasek=0,xlab="Roky",ylab="Funkce přežití",
col=c("green","red"),lty=c(1,1),lwd=c(2,2),adj.subtitle=FALSE)
dev.off()
```



Obrázek 2.2: Funkce přežití pro tobol=1 a pro tobol=0 (Coxův model).

△

Literatura

[1] Aelen O. (1978): Nonparametric estimation of partial transition probabilities in multiple decrement models. *Annals of Statistics* **6(3)**, 457–481.

[2] Amemiya T. (1981): Qualitative response models: A survey. *Journal of Economic Literature* **19(4)**, 481–536.

[3] Anděl J. (2005): Základy matematické statistiky. Matfyzpress, Praha .

[4] Cipra T. (2008): Finanční ekonometrie. Ekopress.

[5] Cox D.R. (1972): Regression models and life-tables. *Journal of the Royal Statistical Society* **34(2)**, 187–220.

[6] EViews 5 user's guide. (2004): Quantitative Micro Software, LLC.

[7] Greene W.H. (2003): Econometric analysis. Prentice Hall, New York.

[8] Hoelzl E., Rustichini A. (2005): Overconfident: Do you put your money on it. *The Economic Journal* **115(April)**, 305–318.

[9] Kaplan E.L., Meier P. (1958): Non parametric estimation from incomplete observations. *Journal of the American statistical association* **53(June)**, 457–481.

[10] Maddala G.S. (1983): Limited dependent and qualitative variables in econometrics. Cambridge University Press.

[11] Pazdera J., Rychnovský M., Zahradník P. (2008): Survival analysis in credit scoring. Seminář: Modelování v ekonometrii, MFF UK, Praha.

[12] Reisnerová S. (2004): Analýza přežití a Coxův model pro diskretní čas. *In: Robust* **13**, 339–346.

[13] Tobin J. (1958): Estimation of relationships for limited dependent variables. *Econometrica* **26(1)**, 24–36.

[14] Zhou M. (2008): Use software R to do survival analysis and simulation. A tutorial. Kentucky, Free download, http://www.stat.nus.edu.sg/ stachenz/Rsurv.pdf.